Саша догоняет друзей

Задача 5. [МОШ 2009/10, 8 класс, задача 5] Друзья Вася и Петя, живущие в деревнях Липовка и Демушкино, были в гостях у своего друга Саши, который живёт в деревне Малиновка, расположенной точно посередине между деревнями Липовка и Демушкино. Нагостившись у Саши, Вася и Петя одновременно вышли и отправились каждый в свою деревню, чтобы вернуться домой через $t_0 = 60$ мин. Спустя $t_0/6 = 10$ мин после выхода своих друзей Саша обнаружил, что каждый из них забыл у него дома свои вещи. Саша решил догнать каждого из них по очереди и отдать им вещи. С какой минимальной скоростью u должен бежать Саша, чтобы успеть догнать каждого из своих друзей до того, как они вернутся в свои деревни? Скорости Васи и Пети одинаковы и равны $v = 5$ км/час.



Поясняющий рисунок: друзья расходятся от Малиновки в разные стороны с одинаковой скоростью v; каждому до своей деревни идти t_0.

▲ **Решение. Что происходит.** Друзья удаляются от Саши в разные стороны. Саша бежит за одним, догоняет, потом разворачивается и догоняет другого, который за это время ушёл ещё дальше. Чем меньше скорость Саши, тем позже он догонит второго. Минимальная скорость соответствует тому, что второго друга он догнал в момент, когда тот входит в свою деревню. Главная идея — построить график зависимости координаты от времени: все три движения на нём — отрезки прямых, и условия задачи становятся геометрией.

Обозначения. Ось x направлена вдоль дороги от Липовки к Демушкино, начало отсчёта — в Малиновке. Время t отсчитывается от момента, когда Вася и Петя вышли. Вася идёт влево, Петя вправо: $x_В = -vt$, $x_П = vt$. Саша выбегает в момент $t_1 = t_0/6 = 10$ мин из точки $x = 0$. Пусть сначала он догоняет Петю, в момент T_1; Васю — в момент t_0

(минимальная скорость: Вася уже у деревни, $x = -vt_0$). Кого Саша догоняет первым, не важно: задача симметрична.

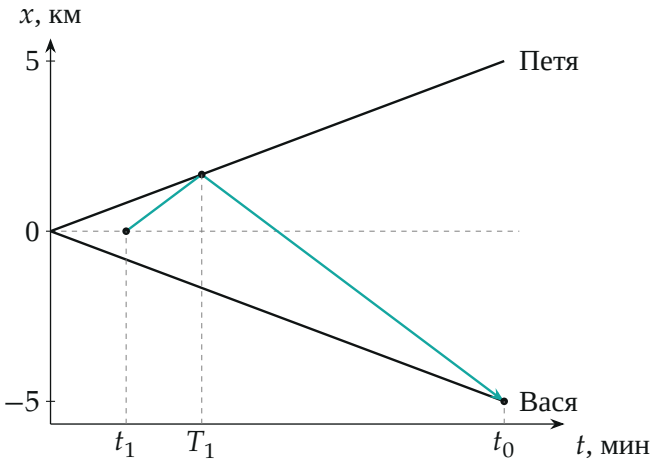


График $x(t)$: чёрные — Вася и Петя, бирюзовая ломаная — Саша. Он выбегает в t_1, догоняет Петю в T_1, потом догоняет Васю в t_0, на пороге деревни.

1. Первый отрезок: Саша догоняет Петю. Саша стартует в момент t_1 из точки $x = 0$ со скоростью u и в момент T_1 оказывается там же, где Петя: $x = vT_1$. Саша пробежал $u(T_1 - t_1)$, и это равно координате Пети:

$$u\,(T_1 - t_1) = vT_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{vT_1}{T_1 - t_1}. \tag{1}$$

2. Второй отрезок: Саша догоняет Васю. Саша разворачивается и бежит влево с той же по модулю скоростью u. На графике это отрезок из точки $(T_1,\ vT_1)$ в точку $(t_0,\ -vt_0)$: при минимальной скорости Вася догнан у самой деревни. Модуль скорости — смещение по x, делённое на время:

$$u = \frac{vT_1 + vt_0}{t_0 - T_1} = v\,\frac{t_0 + T_1}{t_0 - T_1}. \tag{2}$$

Неизвестными остались u и T_1. Время T_1 — момент встречи с Петей, а не задержка t_1: в формулу (2) входит именно он.

3. Решаем систему. Приравняем u из (1) и (2) и сократим v:

$$\frac{T_1}{T_1 - t_1} = \frac{t_0 + T_1}{t_0 - T_1} \;\Rightarrow\; T_1(t_0 - T_1) = (t_0 + T_1)(T_1 - t_1)$$

$$\Rightarrow\; 2T_1^2 - t_1 T_1 - t_0 t_1 = 0.$$

При $t_0 = 60$ мин и $t_1 = 10$ мин это $T_1^2 - 5T_1 - 300 = 0$ (время в минутах), корень, имеющий смысл ($T_1 > t_1$):

$$T_1 = \frac{5 + \sqrt{25 + 1200}}{2} = \frac{5 + 35}{2} = 20 \text{ мин}.$$

Подставим в (1) (или в (2), результат тот же):

$$u = v\,\frac{T_1}{T_1 - t_1} = v\,\frac{20}{20 - 10} = 2v = 10 \text{ км/ч}.$$



Момент $T_1 = 20$ мин: Саша (бирюзовая точка) догнал Петю и бежит назад; Вася на $vT_1 = \frac{5}{3}$ км левее Малиновки.

Обратите внимание. Формула $u = v\,\dfrac{t_0 + T_1}{t_0 - T_1}$ верна, если T_1 — момент первой встречи (20 мин). Если подставить сюда задержку $t_1 = 10$ мин, получится $1{,}4\,v$ — неверно: так считать нельзя, это разные величины.

4. Проверка. Подставим $u = 10$ км/ч и проверим события. До Пети Саша бежит от $t_1 = 10$ до $T_1 = 20$ мин, то есть 10 мин $= \frac{1}{6}$ ч: путь $10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ км; Петя за 20 мин прошёл $5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ км — встреча. Расстояние до Васи в этот момент $2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ км; Вася уходит со скоростью $v = 5$

км/ч, Саша бежит вслед с 10 км/ч, сближение 5 км/ч, время $\dfrac{10/3}{5} = \frac{2}{3}$ ч $= 40$ мин. Итого $20 + 40 = 60$ мин $= t_0$: Вася догнан у деревни, Петя — раньше (на 20-й минуте из 60). Если скорость Саши чуть меньше, к деревне он Васю не догонит. Предел: при $u \to \infty$ Саша догонит мгновенно в момент t_1, время $T_1 \to t_1$.

Физический смысл: пока Саша бежит за Петей, Вася уходит всё дальше, поэтому скорость нужна вдвое больше скорости друзей.

Ответ. $u_{\min} = v\,\dfrac{t_0 + T_1}{t_0 - T_1} = 2v = 10$ км/ч, где $T_1 = 20$ мин — момент, когда Саша догнал первого друга.