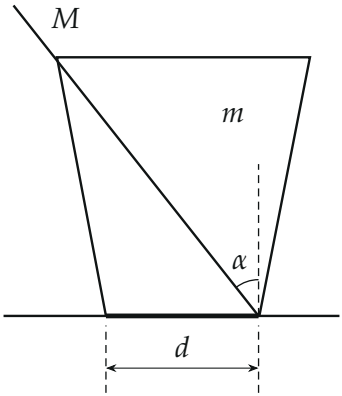
Палочка в пластиковом стаканчике

Задача 6. [МОШ 2009/10, 8 класс, задача 6] На горизонтальном столе стоит пластиковый стаканчик для чая, имеющий форму усеченного конуса. Масса стаканчика $m = 20$ г, диаметр его дна $d = 5$ см. В стаканчик поместили тонкую однородную палочку массой $M = 10$ г, расположив ее так, как показано на рисунке. При этом палочка оказалась наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. При какой длине палочки L стаканчик не перевернется?



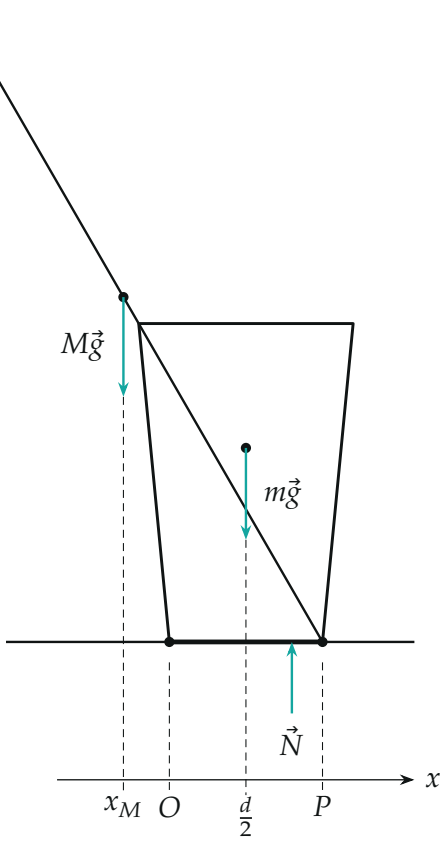
▲ **Решение. Что происходит.** Палочка упирается нижним концом в дно у самого ребра и опирается на край стаканчика. Если палочка длинная, её большая часть торчит наружу влево и перевешивает: стаканчик может опрокинуться через левое ребро дна. Главная идея — рассматривать стаканчик и палочку как одно тело. Контактные силы между ними — внутренние, при суммировании сокращаются, а внешних сил всего две: тяжесть и реакция стола. Равновесие такого тела определяется только тем, где проходит линия действия реакции стола: она должна попасть на дно, между рёбрами.

Обозначения. Ось x направлена вправо вдоль стола, начало — в левом ребре дна O. Правое ребро P имеет координату d. Нижний конец палочки находится в P (так на рисунке условия; угол там нарисован около 38°, а рисунки решения ниже построены с $\alpha = 30°$). Палочка идёт вверх

и влево под углом α к вертикали, поэтому её середина (там центр масс однородной палочки) находится на расстоянии $L/2$ от P и смещена влево на $\dfrac{L}{2}\sin\alpha$:

$$x_M = d - \frac{L}{2}\sin\alpha.$$

Стаканчик симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через центр дна, поэтому его центр масс на вертикали $x_m = d/2$ (высота центра масс не нужна).



Палочка и стаканчик как одно тело: тяжесть стаканчика — на вертикали через середину дна, тяжесть палочки — в её середине, реакция $\vec{N}$ стола — где-то на дне между O и P. Показан случай, когда середина палочки левее O.

1. Условие равновесия тела «стаканчик + палочка». Тело неподвижно. Горизонтальных сил нет (трение стола не нужно). Вертикально: $N = (m + M)g$. Стол действует на дно распределённой силой, и её равнодействующая N приложена в некоторой точке дна с координатой x_N, причём

$$0 \le x_N \le d.$$

Выход за эти границы означал бы, что одно из рёбер дна оторвалось от стола, то есть стаканчик переворачивается. Моменты сил относительно точки O (удобно: реакция в самом O момент не даёт, O — на границе допустимой области). Момент силы F относительно O — это xF_y: положительный — против часовой стрелки. Правило моментов для тела в равновесии:

$$Nx_N - mg\frac{d}{2} - Mg\,x_M = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{m\dfrac{d}{2} + M\,x_M}{m + M}.$$

2. Условие, что левое ребро не оторвётся. Чтобы стаканчик не перевернулся через O, надо $x_N \ge 0$. Подставим $x_M = d - \dfrac{L}{2}\sin\alpha$:

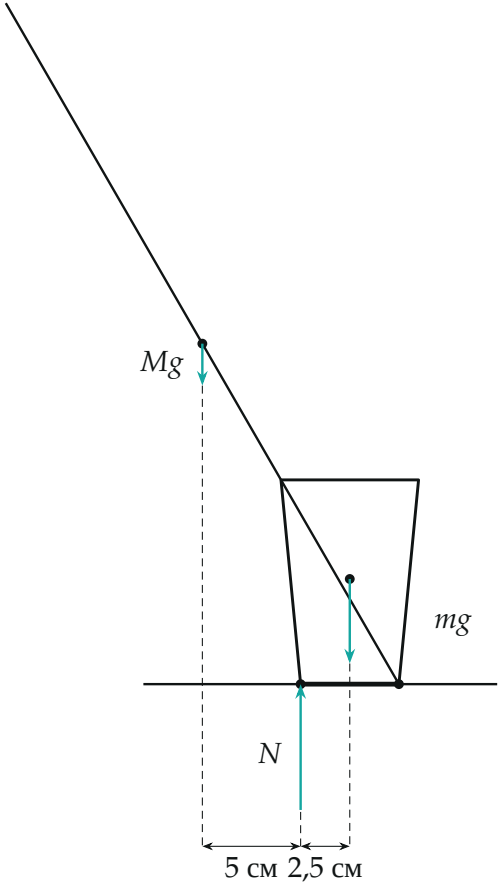
$$m\frac{d}{2} + M\Big(d - \frac{L}{2}\sin\alpha\Big) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad M\frac{L}{2}\sin\alpha \le d\Big(\frac{m}{2} + M\Big)$$

$$\Rightarrow \quad L \le \frac{d\,(m + 2M)}{M\sin\alpha}.$$

3. Второе ребро. Через P перевернуться нельзя: обе тяжести приложены левее P ($d/2 < d$ и $x_M < d$) — их моменты относительно P вращали бы тело против часовой стрелки, то есть прижимали бы левую часть вниз, в стол. Условие $x_N \le d$ выполнено при любой длине.

4. Число.

$$L_{\max} = \frac{5\text{ см}\cdot(20 + 2\cdot 10)\text{ г}}{10\text{ г}\cdot\sin 30^\circ} = \frac{5\cdot 40}{10\cdot 0{,}5}\text{ см} = 40\text{ см}.$$



Предельный случай $L = 40$ см (масштаб рисунка 0,2 см на 1 см, на рисунке — модули сил): реакция стола приложена в самом ребре O, моменты тяжестей относительно него равны: $20 \cdot 2{,}5 = 10 \cdot 5$.

Обратите внимание. Реакции в точках касания палочки и стаканчика (на край и на дно у ребра) в решение не вошли: они внутренние для системы. Их не пришлось искать ни по величине, ни по направлению. Высота стаканчика и расстояние от P до края тоже не нужны.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{см} \cdot \text{г}}{\text{г}} = \text{см}$. Предельные случаи: $\alpha \to 0$ (палочка вертикально) — $L_{\max} \to \infty$, центр масс палочки остаётся над дном; $M \to 0$ — тоже ∞ (лёгкая палочка не перевесит). Подстановка: на границе $m\frac{d}{2} = 20 \cdot 2{,}5 = 50$ г·см, $Mx_M = 10 \cdot (-5) = -50$ г·см —

сумма нуль, значит, реакция стола проходит через O.

Физический смысл: у палочки длиннее 40 см центр масс всего тела выходит за ребро дна, и вес палочки, перекинутой через край, перевешивает стаканчик.

Ответ. $L \leq \dfrac{d\,(m+2M)}{M\sin\alpha} = 40$ см.