Бруски на блоке, вода и лёд

Задача 7. [МОШ 2009/10, 8 класс, задача 7] Через неподвижный блок перекинута легкая нерастяжимая нить, на концах которой висят два стальных цилиндрических бруска. Масса левого бруска $m_1 = 1$ кг. Вначале к нижнему основанию правого бруска был приморожен кусок льда неизвестной массы, а сами бруски удерживались вручную. Правый брусок с приморо женным к нему куском льда погрузили в воду комнатной температуры, налитую в очень широкий сосуд, после чего бруски отпустили. Сразу после этого оказалось, что система находится в равновесии, когда правый брусок погружен в воду на половину своей высоты. После того, как весь приморо женный лед растаял, правый брусок целиком погрузился в воду. При этом система снова оказалась в равновесии. Найдите массу правого бруска, а также массу приморо женного к нему льда. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность стали $\rho_с = 7800$ кг/м^3. Изменением уровня воды в сосуде пренебречь.

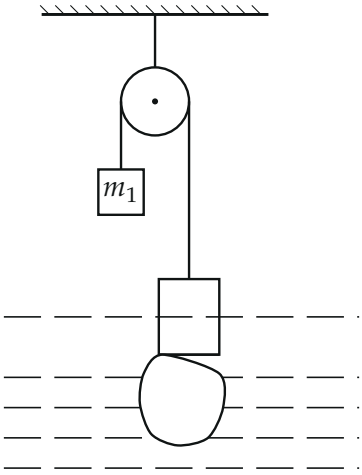
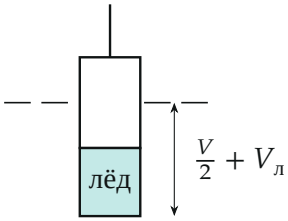


Рисунок условия: левый брусок висит в воздухе, правый с приморо женным льдом погружён в воду наполовину.

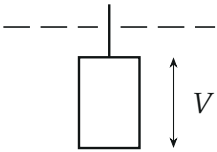
▲ **Решение. Что происходит.** Левый брусок неподвижен, нить лёгкая и без трения, поэтому натяжение нити с обеих сторон равно $m_1 g$ и от состояния правого бруска не зависит. Правый брусок удерживается нитью

и выталкивающей силой воды. Лёд легче воды: он добавляет выталкивающую силу больше своего веса, поэтому брусок погружён лишь наполовину. Когда лёд растаял, этой добавки нет, и брусок погружается целиком. Главная идея — записать условие равновесия правого тела в двух состояниях: сначала без льда (там неизвестна только масса бруска), потом со льдом.

Обозначения. Ось y вверх. m_2 — масса правого бруска, V — его объём, $m_л$ — масса льда, $V_л = m_л/\rho_л$ — его объём. T — сила натяжения нити.



со льдом



лёд растаял

Погружённый объём в двух состояниях: пунктир — уровень воды. Лёд находится ниже основания бруска, поэтому в первом состоянии он целиком под водой.

1. Состояние 2: лёд растаял. Силы на правый брусок: тяжесть $m_2\vec{g}$ вниз, нить $\vec{T}$ вверх, сила Архимеда $\vec{F}_A$ вверх; брусок целиком в воде, поэтому $F_A = \rho_в g V$. Левый брусок в равновесии, нить лёгкая, блок без трения, откуда $T = m_1 g$. Второй закон Ньютона для правого бруска в проекции на y (равновесие, сумма сил равна нулю):

$$T + \rho_в g V - m_2 g = 0.$$

Объём выразим через массу: $V = \dfrac{m_2}{\rho_с}$. Тогда $m_1 + \rho_в \dfrac{m_2}{\rho_с} = m_2$, откуда

$$m_2 = \frac{m_1}{1 - \rho_в/\rho_с} = \frac{1\text{ кг}}{1 - 1000/7800} \approx 1{,}15\text{ кг}.$$

Заодно запомним для пункта 2 соотношение, которое получилось из этого же уравнения: $m_2 - m_1 = \rho_в V$.

2. Состояние 1: лёд примёрз. Рассматриваем брусок вместе со льдом как одно тело: лёд примёрз, внутренние силы между ними сократятся. Лёд находится под нижним основанием бруска, а основание ниже уровня воды (брусок погружён наполовину), поэтому лёд целиком под водой. Под водой находится объём $\frac{V}{2} + V_л$, поэтому

$$F_A = \rho_в g\left(\frac{V}{2} + V_л\right).$$

Условие равновесия тела «брусок + лёд» в проекции на y:

$$m_1 g + \rho_в g\left(\frac{V}{2} + \frac{m_л}{\rho_л}\right) - (m_2 + m_л)\, g = 0.$$

Соберём члены с $m_л$ и воспользуемся $m_2 - m_1 = \rho_в V$ из пункта 1:

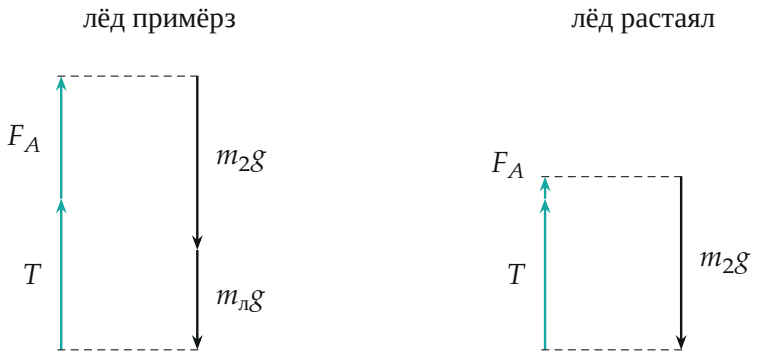
$$m_л\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right) = m_2 - m_1 - \rho_в \frac{V}{2} = \rho_в V - \rho_в \frac{V}{2} = \frac{\rho_в V}{2}.$$

Слева коэффициент положителен: лёд легче воды, поэтому его подъёмная сила больше его веса — он «тянет» брусок вверх, и брусок может держаться только наполовину погружённым. Подставим $V = m_2/\rho_с$:

$$m_л = \frac{\rho_в m_2/(2\rho_с)}{\rho_в/\rho_л - 1} = \frac{m_1\, \rho_в/\rho_с}{2\,(1 - \rho_в/\rho_с)(\rho_в/\rho_л - 1)}.$$

Число: $\frac{\rho_в V}{2} = \frac{1000 \cdot 1{,}47 \cdot 10^{-4}}{2} \approx 0{,}0735$ кг, $\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1 = \frac{1}{9}$:

$$m_л \approx 0{,}0735 \cdot 9 \text{ кг} \approx 0{,}66 \text{ кг}.$$



Баланс сил на правое тело в одном масштабе (длина 2 см соответствует m_1g): бирюзовые стрелки вверх, чёрные вниз. Суммы вверх и вниз совпадают; во втором состоянии $F_A = \rho_в g V = m_2 g - m_1 g$.

Обратите внимание. Натяжение нити в обоих состояниях равно $m_1 g$: оно определяется левым бруском, который не меняется. Забыть про это и считать натяжение, равное весу правого бруска, — главная ошибка. Вторая ловушка: лёд примёрз к основанию, поэтому он целиком под водой, а не наполовину, как брусок.

Проверка. Подставим числа в уравнение равновесия состояния 1 (в единицах $m_1 g$): вверх $T = 1$ и $F_A = \rho_в (V/2 + V_л) = 1000 \cdot (7{,}35 \cdot 10^{-5} + 7{,}35 \cdot 10^{-4}) \approx 0{,}809$ кг, всего 1,809; вниз $m_2 + m_л = 1{,}147 + 0{,}662 = 1{,}809$ — равенство выполнено. Размерность: $\rho_в V$ — кг. Предельный случай: если плотность льда подходит к плотности воды ($\rho_л \to \rho_в$), подъёмной силы у льда нет, и $m_л \to \infty$: чтобы держать брусок наполовину погружённым, нужен бесконечный кусок такого льда. Смысл: нить держит одну и ту же силу $m_1 g$, а недостающую до веса правого бруска силу даёт вода; лёд, который легче воды, добавляет подъёмную силу и поэтому удерживает брусок на половине глубины.

Ответ. $m_2 = \dfrac{m_1}{1 - \rho_в/\rho_с} \approx 1{,}15$ кг; $m_л = \dfrac{m_1\, \rho_в/\rho_с}{2\,(1 - \rho_в/\rho_с)(\rho_в/\rho_л - 1)} \approx 0{,}66$ кг.