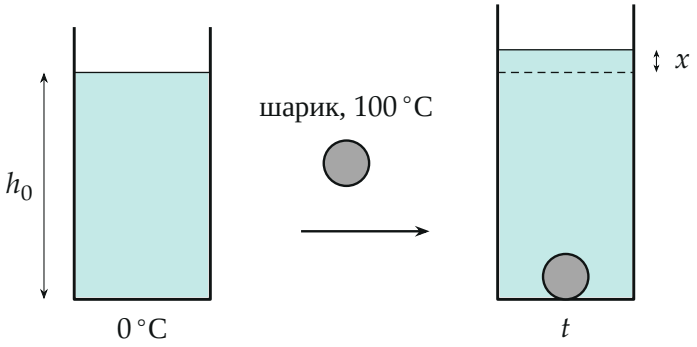
Алюминиевый шарик в стакане с водой

Задача 8. [МОШ 2009/10, 8 класс, задача 8] В цилиндрический стакан налита вода до уровня $h_0 = 10$ см при температуре $t_0 = 0\,°\text{C}$. В стакан бросают алюминиевый шарик, вынутый из другого сосуда с водой, кипящей при температуре $t_к = 100\,°\text{C}$. При этом уровень воды повышается на $x = 1$ см. Какой будет установившаяся температура в стакане? Удельные теплоемкости воды и алюминия $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C) и $c_а = 920$ Дж/(кг·°C), плотности воды и алюминия $\rho_в = 1000$ кг/м^3 и $\rho_а = 2700$ кг/м^3. Теплоемкостью стакана можно пренебречь.



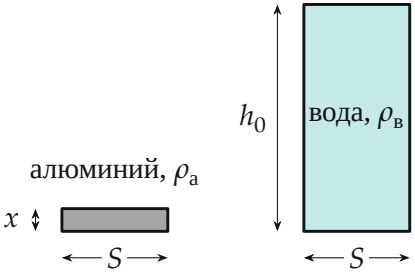
Поясняющий рисунок: стакан до и после. Шарик тонет, поэтому уровень растёт на x, пунктир — прежний уровень.

▲ **Решение. Что происходит.** Горячий шарик отдаёт тепло холодной воде, пока температуры не сравняются. Подъём уровня на x — это объём шарика (он целиком под водой, алюминий тяжелее воды), по нему найдётся масса. Массу воды даёт высота h_0. Площадь дна стакана неизвестна, но она сократится. Главная идея — уравнение теплового баланса: сколько тепла отдал шарик, столько получила вода.

Обозначения. S — площадь дна стакана, t — установившаяся температура, $m_а$, $m_в$ — массы шарика и воды.

1. Массы из геометрии. Шарик вытеснил воду, уровень поднялся на x при площади дна S: объём шарика $V = Sx$ (шарик целиком под водой). Масса шарика и воды:

$$m_а = \rho_а S x, \qquad m_в = \rho_в S h_0.$$



Шарик по объёму — слой высотой x на площади S, вода — столб высотой h_0 на той же площади. Массы: $\rho_а S x$ и $\rho_в S h_0$.

2. Уравнение теплового баланса. Система «шарик + вода» — замкнутая: теплоёмкостью стакана и потерями тепла в воздух пренебрегаем. Шарик остывает от $t_к$ до t, вода нагревается от t_0 до t:

$$c_а\, m_а\, (t_к - t) = c_в\, m_в\, (t - t_0).$$

Подставим массы. Площадь S входит в обе части и сокращается:

$$c_а \rho_а\, x\, (t_к - t) = c_в \rho_в\, h_0\, (t - t_0).$$

Неизвестной осталась только t. Раскроем скобки и соберём члены с t:

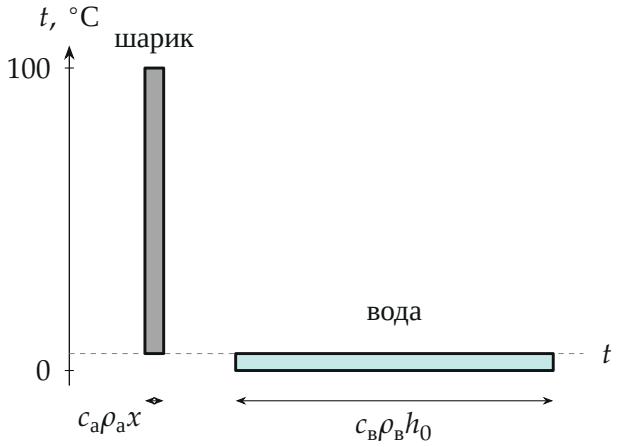
$$t\,(c_а \rho_а x + c_в \rho_в h_0) = c_а \rho_а x\, t_к + c_в \rho_в h_0\, t_0.$$

3. Ответ в общем виде и число.

$$t = \frac{c_а \rho_а\, x\, t_к + c_в \rho_в\, h_0\, t_0}{c_а \rho_а\, x + c_в \rho_в\, h_0}.$$

Посчитаем отдельно: $c_а \rho_а x = 920 \cdot 2700 \cdot 0{,}01 = 24\,840$ Дж/(м^2·°C) — теплоёмкость шарика на единицу площади дна, $c_в \rho_в h_0 = 4200 \cdot 1000 \cdot 0{,}1 = 420\,000$ Дж/(м^2·°C). При $t_0 = 0$ °C:

$$t = \frac{24\,840 \cdot 100}{24\,840 + 420\,000} = \frac{2\,484\,000}{444\,840} \approx 5{,}6\ °\text{C}.$$



Тепло $Q = C\,\Delta t$ — площадь прямоугольника: ширина — теплоёмкость (на единицу площади дна), высота — изменение температуры. У шарика узкий высокий прямоугольник ($\Delta t \approx 94{,}4\,^\circ C$), у воды широкий низкий ($\Delta t \approx 5{,}6\,^\circ C$); площади равны.

4. Второй способ — средневзвешенная температура. Температуру смеси двух тел с теплоёмкостями C_1, C_2 и температурами t_1, t_2 даёт $\dfrac{C_1 t_1 + C_2 t_2}{C_1 + C_2}$ (так же получается из баланса). Здесь $C_а \propto 24\,840$, $C_в \propto 420\,000$ с общим множителем S:

$$t = \frac{24\,840 \cdot 100 + 420\,000 \cdot 0}{24\,840 + 420\,000} \approx 5{,}6\,^\circ\text{C}.$$

Обратите внимание. Площадь дна S не дана — ответ от неё не зависит, потому что обе массы пропорциональны S.

Проверка. Размерность: числитель в Дж/м^2, знаменатель в Дж/(м^2·°C), результат в °C. Предельные случаи: $x \to 0$ (нет шарика) — $t \to t_0 = 0\,^\circ$C; $x \to \infty$ (огромный шарик) — $t \to t_к = 100\,^\circ$C. Результат 5,6 °C лежит между 0 и 100 °C, ближе к 0: теплоёмкость воды в $\dfrac{420\,000}{24\,840} \approx 17$ раз больше. Смысл: шарик отдаёт воде почти всё своё тепло, но воды так много, что она нагревается лишь на несколько градусов.

Ответ. $t = \dfrac{c_а\rho_а\, x\, t_к + c_в\rho_в\, h_0\, t_0}{c_а\rho_а\, x + c_в\rho_в\, h_0} \approx 5{,}6\,^\circ\text{C}.$