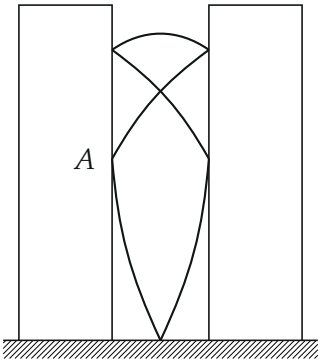
Мяч в арке

Задача 1. [МОШ 2009/10, 9 класс, задача 1] В арке около одной из стен стоит мальчик и бросает мяч из точки A, находящейся на высоте $h = 170$ см над землёй. Начальная скорость мяча $v_0 = 15$ м/с. Мяч вернулся в точку бросания спустя $t = 3$ с, описав траекторию, показанную на рисунке. Чему равно расстояние D между стенами арки? Все соударения мгновенные и абсолютно упругие, сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Мяч летает между двумя вертикальными стенами, три раза ударяется о них, один раз о землю и возвращается в A. Стена вертикальна и гладкая, удар упругий и мгновенный: при ударе меняет знак только горизонтальная составляющая скорости, а её модуль и вся вертикальная составляющая остаются прежними. Поэтому движение разделяется на два независимых: по горизонтали — равномерное с постоянной по модулю скоростью v_x, по вертикали — свободный полёт с ускорением g и одним упругим ударом о землю. Горизонталь даст связь D с v_x, вертикаль — связь v_x с данными задачи.

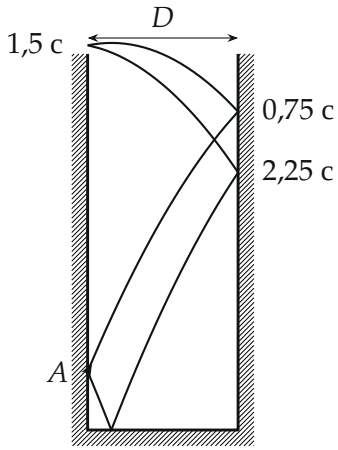


Рис. 1. Траектория мяча, рассчитанная по данным условия (масштаб по осям одинаковый; на рисунке условия она схематична); у точек ударов — моменты времени

Обозначения. Ось y направлена вверх, начало отсчёта высоты — точка A (земля на высоте $-h$). v_x — модуль горизонтальной составляющей скорости, v_y — вертикальная составляющая начальной скорости (вверх), $v_з$ — модуль вертикальной скорости мяча в момент удара о землю.

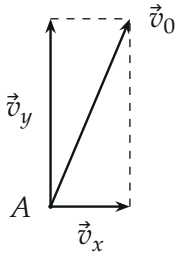


Рис. 2. Разложение начальной скорости на горизонтальную и вертикальную составляющие

1. Разложение скорости. В момент броска скорость $\vec{v}_0$ раскладывается на v_x и v_y:

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Нужно найти v_x, а v_y заранее неизвестна — её исключим, использовав вертикальное движение.

2. Горизонталь: путь равен $4D$. Горизонтальная скорость не меняется по модулю ни при ударах о стены, ни при ударе о землю (земля горизонтальна, она меняет только вертикальную составляющую). Значит, пока мяч в полёте, он проходит по горизонтали путь $v_x t$ — сумму длин всех перелётов. Считаем перелёты по траектории: от стены A к правой стене (путь D), от правой к левой (D), от левой снова к правой (D), от правой к левой стене с ударом о землю по дороге — и на этом участке путь D (удар о землю горизонтальный путь не меняет). Итого

$$4D = v_x t. \qquad (1)$$

Место удара о землю на ответ не влияет.

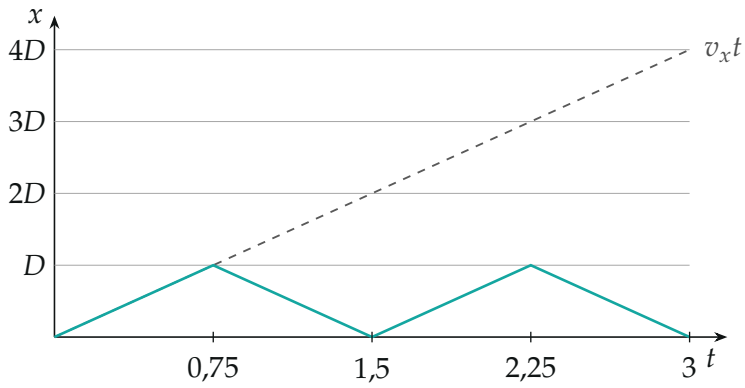


Рис. 3. Горизонтальная координата мяча (бирюзовая линия) и «развёрнутый» путь $v_x t$ (штриховая линия): за $t = 3$ с мяч проходит $4D$; время в секундах

3. Вертикаль: что даёт время t. Вертикальное движение мяча — это бросок вверх со скоростью v_y с высоты h и упругий удар о землю. Разобьём его на два этапа.

Этап 1: мяч поднимается, останавливается и падает обратно на уровень A; симметрия вертикального броска даёт время $t_1 = 2v_y/g$ и скорость v_y (вниз) на уровне A.

Этап 2: от уровня A мяч летит вниз до земли со скоростью, растущей от v_y до $v_з$; по закону сохранения энергии (сопротивления нет, удары упругие) для вертикального движения

$$\frac{mv_з^2}{2} = \frac{mv_y^2}{2} + mgh, \qquad v_з^2 = v_y^2 + 2gh, \tag{2}$$

время падения $t_2 = (v_з - v_y)/g$. Удар о землю упругий: вертикальная скорость меняет знак, модуль $v_з$ сохраняется, и движение вверх от земли до уровня A — то же падение, пущенное назад по времени: оно длится тоже t_2.

Полное время вертикального движения от броска до возвращения на уровень A

$$t = t_1 + 2t_2 = \frac{2v_y}{g} + \frac{2(v_з - v_y)}{g} = \frac{2v_з}{g} \quad \Rightarrow \quad v_з = \frac{gt}{2}. \tag{3}$$

Время t зависит только от скорости у земли: слагаемые с v_y сократились.

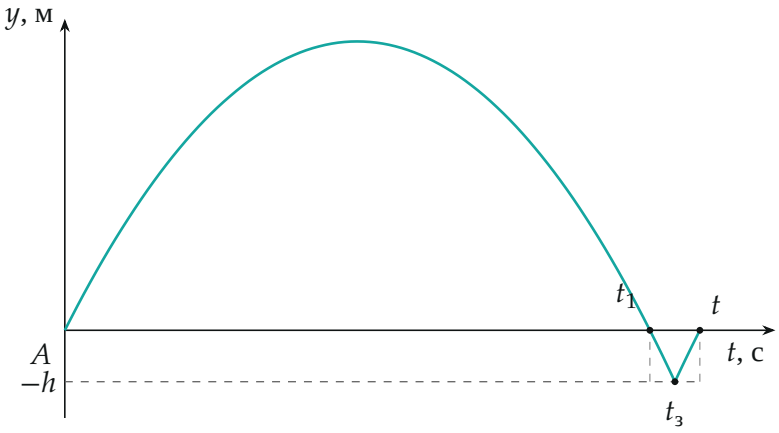


Рис. 4. Высота мяча над уровнем A как функция времени; $t_1 = 2v_y/g$ — возвращение на уровень A при падении, $t_з$ — удар о землю, t — возвращение в A

4. Соберём ответ. Из (3) и (2)

$$v_y^2 = v_з^2 - 2gh = \frac{g^2t^2}{4} - 2gh, \qquad v_x^2 = v_0^2 - v_y^2 = v_0^2 + 2gh - \frac{g^2t^2}{4}.$$

Подставим v_x в (1):

$$D = \frac{v_x t}{4} = \frac{t}{4}\sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{g^2t^2}{4}}.$$

Числа: $v_з = gt/2 = 15$ м/с; $v_y^2 = 15^2 - 2\cdot 10\cdot 1{,}7 = 191$ м^2/с^2, $v_y \approx 13{,}8$ м/с; $v_x^2 = 15^2 - 191 = 34$ м^2/с^2, $v_x \approx 5{,}83$ м/с; $D = \frac{3}{4}\cdot 5{,}83 \approx 4{,}4$ м.

Обратите внимание. Разделить движение на горизонталь и вертикаль можно, только потому что удары о вертикальные стены не меняют v_y, а удар о горизонтальную землю не меняет v_x.

Проверка. Второй способ для v_x: полная энергия мяча сохраняется, значит у земли $v_x^2 + v_з^2 = v_0^2 + 2gh$, и $v_x^2 = 259 - 225 = 34$ — то же. Предельный случай: бросок горизонтальный ($v_y = 0$): тогда $gt/2 = \sqrt{2gh}$, то есть $t = 2\sqrt{2h/g}$ — время падения с высоты h и возврата, верно. Численная проверка полёта по уравнениям даёт возвращение в A ровно при $t = 3$ с (рис. 1 построен по этим числам). Размерность: с $\cdot$ м/с = м.

Смысл: время полёта задаёт только вертикальную скорость у земли $v_з = gt/2$, а остаток энергии уходит в горизонтальную скорость.

Ответ. $D = \frac{t}{4}\sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{g^2t^2}{4}} \approx 4{,}4$ м.