# Опрокидывание чаши с водой

**Задача 2.** [МОШ 2009/10, 9 класс, задача 2] Лёгкая тонкостенная чаша в виде прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер $a$, $b$ и $c$ свободно подвешена на горизонтальной оси так, что нижняя грань чаши с размерами $a \times c$ горизонтальна, а верхняя открыта (то есть отсутствует — см. рисунок). Ось проходит перпендикулярно граням параллелепипеда с размерами $a \times b$ в плоскости их симметрии на расстоянии $h < b/2$ от нижней грани $a \times c$. Чаша начинает наполняться водой со скоростью $v$ м$^3$/с. Через какое время чаша опрокинется, повернувшись вокруг оси? Что с ней будет происходить в дальнейшем, если скорость наполнения не меняется?

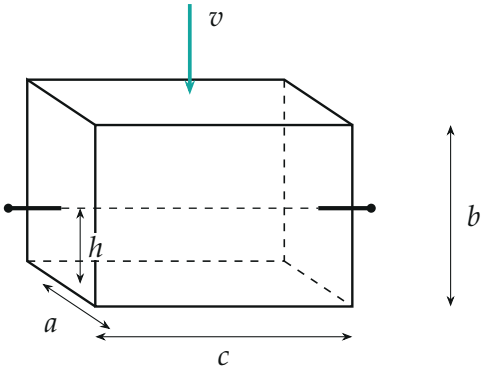



*Рис. 1. Чаша на оси; вода льётся сверху со скоростью $v$ (рисунок организаторов, перерисован)*

▲ **Решение. Что происходит.** Чаша лёгкая, поэтому её вес мы не учитываем: всё решает вес воды. Он приложен в центре масс воды, а по симметрии центр масс лежит на вертикали, проходящей через ось, — пока чаша не повернулась, момент веса воды относительно оси равен нулю. Устойчивость зависит от того, где центр масс воды относительно оси: ниже оси — чаша как маятник возвращается в равновесие, выше — как карандаш на остриё падает. Значит, момент опрокидывания — тот, когда центр масс воды поднимается до уровня оси. После опрокидывания вода выливается, чаша возвращается, и всё повторяется. Главная

идея: положение центра масс воды зависит от глубины слоя — через неё выразим время.

**Обозначения.** $y$ — глубина воды в чаше (дно горизонтально), $C$ — центр масс воды, $O$ — точка оси на плоскости симметрии, $m$ — масса воды, $T$ — искомое время. Допущение: плеском воды в слегка наклонённой чаше пренебрегаем, воду считаем грузом с центром масс в середине слоя (так задумано условием).

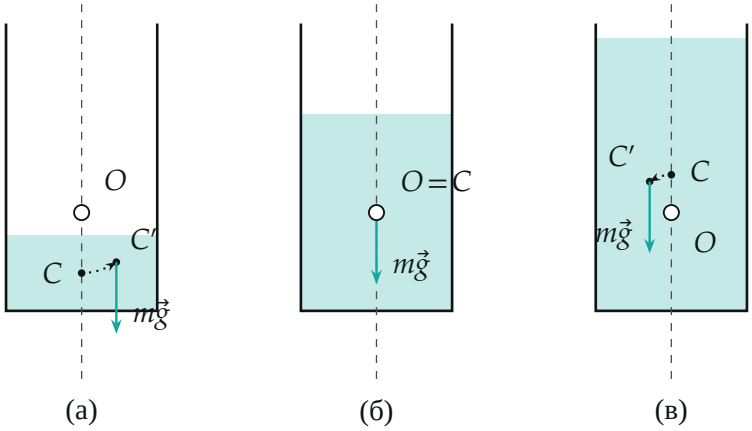



*Рис. 2. Сечение чаши плоскостью $a \times b$ при трёх глубинах воды: (а) $y < 2h$, (б) $y = 2h$, (в) $y > 2h$. Точечная дуга — путь центра масс при малом повороте чаши вокруг $O$; $C'$ — его новое положение*

**1. Глубина воды в момент $t$.** Вода льётся со скоростью $v$, то есть за время $t$ в чаше оказывается объём $V = vt$. Площадь дна $ac$, значит

$$vt = ac\,y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{vt}{ac}.$$

**2. Где центр масс воды.** Слой однородный, поэтому центр масс $C$ лежит на середине глубины — на высоте $y/2$ над дном, на вертикали через $O$. Ось расположена выше дна на $h$; расстояние от оси вниз до $C$

$$d = h - \frac{y}{2}.$$

Знак $d$ говорит, где центр масс: $d > 0$ — ниже оси, $d < 0$ — выше.

**3. Устойчивость: что произойдёт при малом повороте.** Повернём чашу на малый угол $\varphi$. Вода вместе с чашей поворачивается вокруг $O$, и центр масс уходит с вертикали через ось на горизонтальное расстояние $x = d\sin\varphi$ (рис. 2). Вес воды $m\vec{g}$ тянет вниз, его плечо относительно $O$ равно $x$, момент $M = mgd\sin\varphi$.

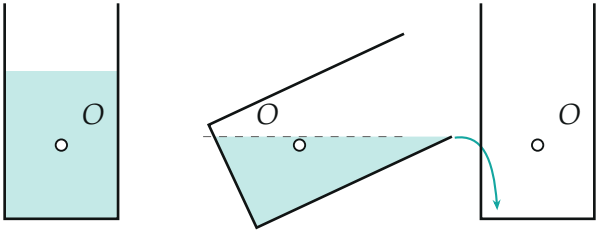
- $d > 0$ (центр масс ниже оси, рис. 2а): момент веса направлен против поворота и возвращает чашу назад — равновесие устойчиво.
- $d < 0$ (центр масс выше оси, рис. 2в): момент усиливает поворот — чаша опрокидывается.
- $d = 0$ (рис. 2б): момент равен нулю при любом наклоне; это граница. Любая лишняя вода сразу переводит чашу в неустойчивое состояние.

**4. Момент опрокидывания.** Граница $d = 0$ даёт $y_* = 2h$ — вода должна достать до высоты $2h$ над дном. Подставим в пункт 1:

$$T = \frac{ac\,y_*}{v} = \frac{2hac}{v}.$$

Условие $h < b/2$ означает $2h < b$: к моменту опрокидывания вода ещё не доходит до верхнего края чаши и не переливается.

**5. Что будет дальше.** После опрокидывания чаша поворачивается, поверхность воды остаётся горизонтальной, и вода выливается через нижний край (рис. 3). Пока наклон растёт, воды в чаше всё меньше, и в итоге чаша пустеет. Пустая лёгкая чаша под собственным весом возвращается в исходное положение дном вниз (так она и висела в начале). Вода льётся с той же скоростью $v$ и набирается снова от нуля: через время $T$ чаша опять опрокидывается. Процесс периодический: наполнение → опрокидывание → выливание → возврат → наполнение, с периодом $T$, если опрокидывание и выливание быстрые по сравнению с $T$.




(1) (2) (3)

*Рис. 3. Цикл: (1) наполнение до $y = 2h$; (2) опрокидывание, вода выливается через нижний край; (3) пустая чаша вернулась*

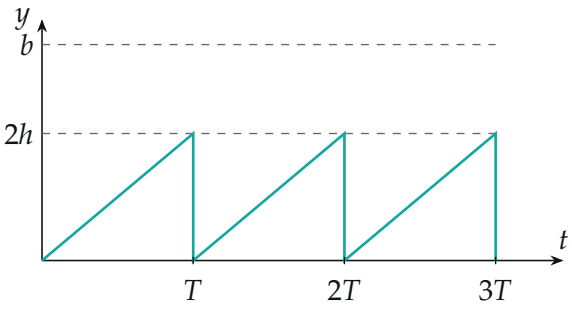



*Рис. 4. Глубина воды в чаше со временем: растёт до $2h$, затем после опрокидывания падает до нуля; период $T$*

**Обратите внимание.** Чаша опрокидывается не тогда, когда уровень воды дойдёт до оси ($y = h$), а когда до оси дойдёт *центр масс* воды, то есть при $y = 2h$: уровень воды в этот момент вдвое выше оси. Устойчивость определяет центр масс, а не уровень.

**Проверка.** Размерность: м $\cdot$ м$^2$/(м$^3$/с) $=$ с. Предел $h \to 0$ (ось у самого дна): $T \to 0$, и действительно, центр масс любой воды выше оси — чаша опрокидывается от первых капель. Предел $h \to b/2$ (ось посередине высоты): $T = abc/v$ — время заполнения чаши целиком, центр масс полной чаши как раз на оси, это согласуется с условием $h < b/2$.

Смысл: чаша копит воду до порога и сбрасывает её целиком.

**Ответ.** Чаша опрокинется через время $T = \dfrac{2hac}{v}$; затем она будет периодически, с периодом $T$, наполняться водой и опрокидываться, выливая воду.