Перелив воды между бочками

Задача 3. [МОШ 2009/10, 9 класс, задача 3] В двух одинаковых бочках находится одинаковое количество воды. Температура воды в первой бочке $t_1 = 20\,^\circ\text{C}$, а во второй бочке $t_2 = 60\,^\circ\text{C}$. Из первой бочки перелили некоторое количество воды во вторую, и в ней установилась температура $t = 50\,^\circ\text{C}$. Затем из второй бочки перелили такое же количество воды в первую так, что воды в бочках снова стало поровну. Какая температура установится в первой бочке? Всеми потерями тепла во внешнюю среду и механической работой, совершённой при переливании воды, пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Это теплообмен смешиванием: в изолированной системе теплота, отданная горячей водой, равна теплоте, полученной холодной (уравнение теплового баланса). Бочек две, и переливаний два; масса перелитой воды m неизвестна, но одинакова при обоих переливаниях. Её можно найти из первого переливания и подставить во второе — это прямой путь. Есть и короткий: закон сохранения энергии для обеих бочек сразу, масса m в нём даже не появится.

Обозначения. M — масса воды в каждой бочке в начале; m — масса перелитой порции; c — удельная теплоёмкость воды; t_0 — искомая температура в первой бочке в конце. Тепловых потерь нет, теплоёмкостью бочек пренебрегаем (в условии о них ничего нет).

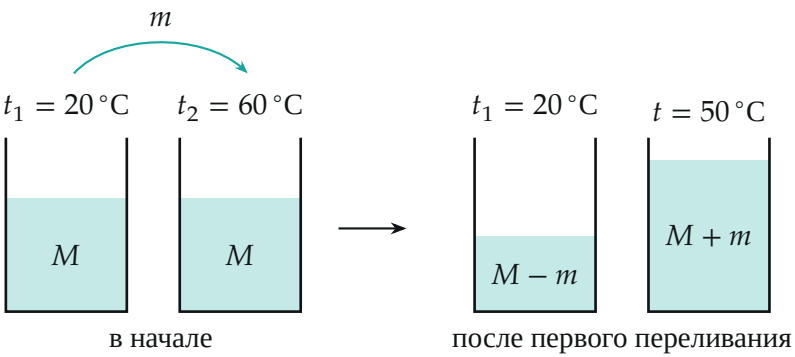


Рис. 1. Начало и конец первого переливания (высота воды пропорциональна её массе)

1. Первое переливание: найдём m. Порция m из первой бочки (при t_1) попала во вторую (масса M при t_2); после перемешивания температура t одинакова во всей воде второй бочки. Холодная порция нагрелась от t_1 до t и получила $Q_1 = cm(t-t_1)$; горячая вода второй бочки остыла от t_2 до t и отдала $Q_2 = cM(t_2-t)$. Тепло не терялось, значит $Q_1 = Q_2$:

$$m(t-t_1) = M(t_2-t) \quad \Rightarrow \quad m = M\,\frac{t_2-t}{t-t_1} = M\cdot\frac{10}{30} = \frac{M}{3}.$$

Порция — треть исходной массы. Теперь в первой бочке $M-m=\frac{2}{3}M$ воды при t_1, во второй $M+m=\frac{4}{3}M$ при t.

2. Второе переливание. Из второй бочки в первую переливаем ту же порцию m. Она взята из воды, температура которой уже выровнялась, то есть равна t. Порция при t смешивается в первой бочке с водой массой $M-m$ при t_1; в конце температура t_0. Горячая порция остывает от t до t_0, холодная вода нагревается от t_1 до t_0:

$$m(t-t_0) = (M-m)(t_0-t_1) \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{m\,t + (M-m)\,t_1}{M} = \frac{1}{3}\,t + \frac{2}{3}\,t_1.$$

Числа: $t_0 = \dfrac{50}{3} + \dfrac{40}{3} = 30\,^\circ\text{C}$.

Обратите внимание. Температура воды, оставшейся во второй бочке после второго переливания, не меняется и остаётся t: из однородно прогретой воды взяли часть той же температуры. Именно поэтому во втором способе (п. 3) эта бочка в конце тоже при t.

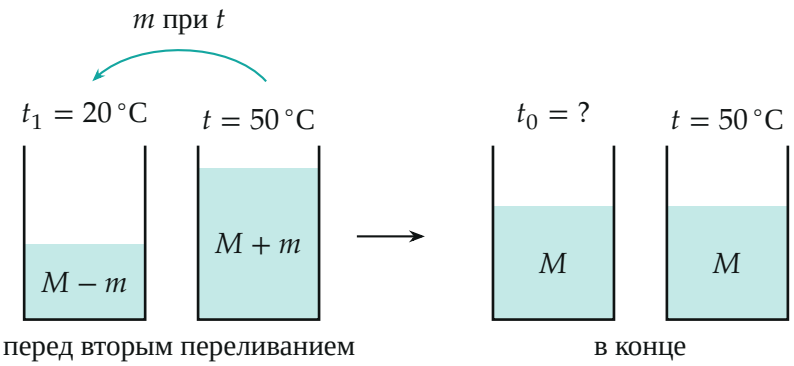


Рис. 2. Второе переливание: та же порция m при температуре t возвращается в первую бочку

3. Второй способ: без массы m. Внутренняя энергия воды пропорциональна mt (температуры в градусах Цельсия, отсчёт от 0 °C — общая масса воды не меняется, начало отсчёта на разность не влияет). Тепла наружу нет, и работа при переливании не совершается, поэтому сумма $c\sum mt$ по двум бочкам сохраняется. В начале она равна $cM(t_1 + t_2)$. В конце в каждой бочке снова по M воды; во второй бочке температура осталась t (из неё вычерпывали воду как раз такой температуры, п. 2). Значит

$$cM\,t_0 + cM\,t = cM(t_1 + t_2) \quad \Rightarrow \quad t_0 = t_1 + t_2 - t = 20 + 60 - 50 = 30\,^\circ\text{C}.$$

Тот же ответ: масса m в нём вообще не нужна.

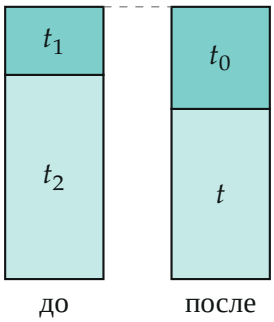


Рис. 3. Сумма $t_1 + t_2$ до переливаний равна сумме $t + t_0$ после: высоты столбиков одинаковы

Проверка. Размерность: температура. Предельный случай $m \to 0$ (почти ничего не перелили): тогда $t \to t_2$, и ответ $t_0 = t_1 + t_2 - t \to t_1$ — первая бочка осталась при своей температуре, верно. Случай $m = M$ (перелили всю воду первой бочки): $t = (t_1 + t_2)/2$, затем во второй $2M$ воды при t, обратно M при t — в первой стало $t_0 = t = (t_1 + t_2)/2$; формула даёт $t_1 + t_2 - t = (t_1 + t_2)/2$, совпало. Найденная масса $m = M/3 < M$ физически допустима, $t_0 = 30\,^\circ\text{C}$ лежит между t_1 и t.

Смысл: в изолированной системе сумма «масса × температура» сохраняется, а вторая бочка после первого переливания несёт остаток температуры t — отсюда ответ $t_1 + t_2 - t$.

Ответ. $t_0 = t_1 + t_2 - t = 30\,^\circ\text{C}$.