Конус на столе

Задача 5. [МОШ 2009/10, 9 класс, задача 5] На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой m с радиусом основания R и углом при вершине 2α. Для того, чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу A. Какую минимальную работу A_1 нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?

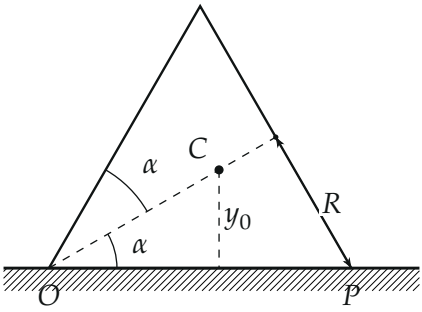


Рис. 1. Конус лежит на боку (осевое сечение): вершина O и точка ребра основания P на столе, C — центр масс, y_0 — его высота над столом (поясняющий рисунок)

▲ **Решение. Что происходит.** Конус поднимают медленно, поэтому его кинетическая энергия всё время равна нулю, а работа внешней силы идёт только на увеличение потенциальной энергии: $A = mg\,\Delta y_C$, где y_C — высота центра масс C. Работа в обоих случаях — это mg, умноженное на подъём центра масс. Для постановки на основание нужно довести конус до положения неустойчивого равновесия — центр масс над ребром основания, на которое конус опирается, — а дальше он опрокинется сам. Значит, надо найти, на какой высоте будет центр масс в этом положении, и вычесть начальную.

Обозначения. H — высота конуса, C — центр масс, y_0 — его начальная высота над столом, P — точка ребра основания, на которой конус будет опираться при опрокидывании, ρ — расстояние PC.

1. Геометрия конуса. В осевом сечении половина угла при вершине равна α, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = R/H$:

$$H = R\operatorname{ctg}\alpha.$$

Центр масс однородного конуса лежит на оси на расстоянии $\frac{3}{4}H$ от вершины, то есть $\frac{1}{4}H$ от основания.

2. Начальная высота центра масс. Лежащий на боку конус касается стола образующей. Ось составляет с образующей угол α (рис. 1), и C отстоит от вершины на $\frac{3}{4}H$ вдоль оси, поэтому его расстояние до образующей, то есть до стола,

$$y_0 = \frac{3}{4}H\sin\alpha = \frac{3}{4}R\cos\alpha.$$

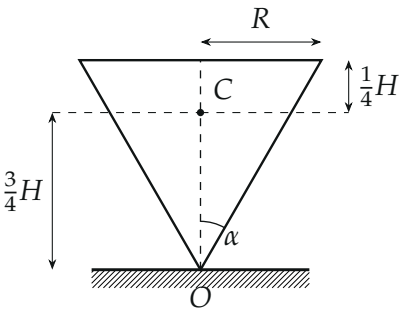


Рис. 2. Конус стоит на вершине, ось вертикальна: центр масс на высоте $\frac{3}{4}H$ над столом

3. Что даёт работа A**.** Когда конус стоит на вершине, его ось вертикальна, C на высоте $\frac{3}{4}H$ (рис. 2). Подъём центра масс $\frac{3}{4}H - y_0$:

$$A = mg\left(\frac{3}{4}R\operatorname{ctg}\alpha - \frac{3}{4}R\cos\alpha\right) = \frac{3}{4}\,mgR\cos\alpha\,\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

Эта величина нам пригодится в конце: ею можно заменить параметры α и m в ответе.

4. Критическое положение: центр масс над ребром. Чтобы поставить конус на основание, надо опустить основание на стол и поднять вершину. Конус будет поворачиваться, опираясь на точку P ребра основания (она остаётся на столе). Пока центр масс левее вертикали, проходящей через P, вес $m\vec{g}$ тянет конус обратно (момент веса относительно P направлен против поворота). Когда C окажется точно над P, равновесие неустойчиво (рис. 3), и малейший толчок опрокинет конус на основание уже без нашей работы. Это и есть наибольший подъём, который надо оплатить.

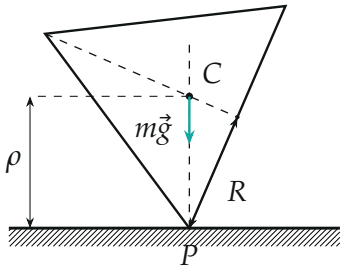


Рис. 3. Критическое положение: конус опирается на точку P ребра основания, центр масс C над P на высоте ρ

5. Высота центра масс в критическом положении. Центр масс лежит на оси на расстоянии $\frac{1}{4}H$ от центра основания. Точка P лежит на ребре, то есть на расстоянии R от центра основания по перпендикуляру к оси. Эти два отрезка перпендикулярны, поэтому расстояние от C до P

$$\rho = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{4}\right)^2} = R\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{16}}.$$

В критическом положении C над P, и его высота над столом равна самому ρ.

6. Ответ. Минимальная работа — подъём центра масс от y_0 до ρ:

$$A_1 = mg(\rho - y_0) = mgR\left(\sqrt{1 + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{16}} - \frac{3}{4}\cos\alpha\right).$$

Теперь выразим через A (п. 3): $\dfrac{A}{mgR(1-\sin\alpha)} = \dfrac{3}{4}\operatorname{ctg}\alpha$, поэтому $\operatorname{ctg}\alpha - \dfrac{A}{mgR(1-\sin\alpha)} = \dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\alpha$, а $\dfrac{3}{4}mgR\cos\alpha = \dfrac{A\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. Тогда

$$A_1 = mgR\sqrt{1+\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{A}{mgR(1-\sin\alpha)}\right)^2} - \frac{A\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

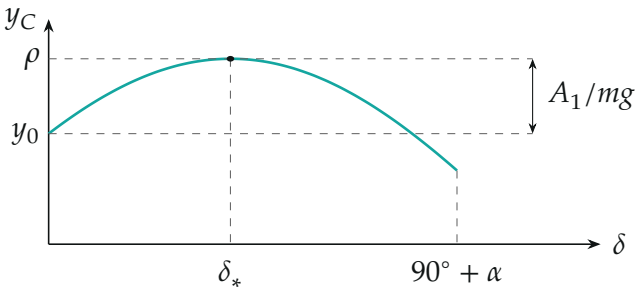


Рис. 4. Высота центра масс при повороте вокруг P на угол δ: подъём от y_0 до ρ (при δ_* центр масс над P), затем спуск на основание; $\alpha = 30^\circ$

Почему меньше нельзя. Каким бы путём конус ни переворачивали, в какой-то момент его ось составит с вертикалью тот угол ψ_*, при котором $\operatorname{tg}\psi_* = 4R/H$ (в критическом положении). Конус в этот момент касается стола точкой ребра основания (самой нижней его точкой: вершина выше), и центр масс отстоит от неё ровно на ρ по прямой под этим углом — его высота равна ρ при любом пути. Значит, центр масс обязательно побывает на высоте ρ, и меньше $mg(\rho - y_0)$ работа быть не может.

Обратите внимание. Поворот надо считать вокруг ребра основания, а не вокруг вершины: вокруг вершины конус лишь катится по столу без подъёма (высота C постоянна, y_0). И высоту в конце считать не нужно: после прохождения C над P конус сам падает на основание, и работа над ним совершается силой тяжести.

Проверка. Размерность: mgR — энергия, остальное безразмерно. Предел $\alpha \to 90^\circ$: конус превращается в тонкий диск, лежащий вершинной стороной вниз; $A \to 0$ (поднимать нечего), $\rho \to R$, $y_0 \to 0$ и

$A_1 \to mgR$ — чтобы перевернуть диск на другую грань, надо поставить его на ребро, центр масс при этом поднимается на R; верно. Совпадение двух записей ответа проверено численно при $\alpha = 20°$–$80°$ (расхождения в 12-м знаке).

Смысл: на основание конус «перевалится» сам, как только центр масс окажется над ребром, поэтому плата — это только подъём центра масс до этой точки.

Ответ. $A_1 = mg\left(\rho - \frac{3}{4}R\cos\alpha\right) = mgR\left(\sqrt{1+\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{16}} - \frac{3}{4}\cos\alpha\right) = mgR\sqrt{1+\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{A}{mgR(1-\sin\alpha)}\right)^2} - \frac{A\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.