Сила на нити, груз на подставке

Задача 6. [МОШ 2009/10, 9 класс, задача 6] Какую силу F в горизонтальном направлении надо приложить к концу нити в точке A системы, изображённой на рисунке, чтобы груз массой m_2 не отрывался от подставки, а нить, к другому концу которой прикреплён груз массой m_1, оставалась натянутой? Каким при этом может быть ускорение $\vec{a}$ груза m_1? Нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно g.

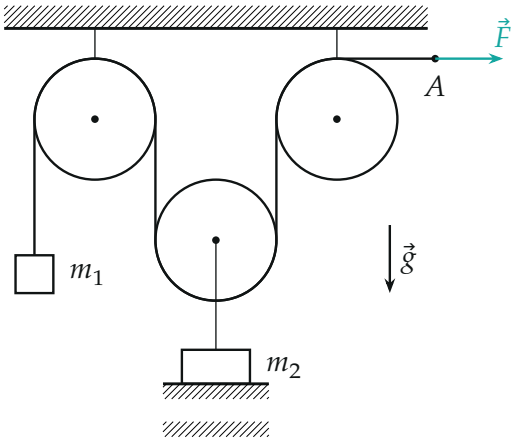


Рис. 1. Система блоков (рисунок организаторов, перерисован)

▲ **Решение. Что происходит.** Нить одна, невесомая, блоки невесомые и без трения. Значит, сила натяжения T вдоль всей нити одинакова: невесомый блок не может иметь разных натяжений по сторонам, иначе его ускорение было бы бесконечным. Конец нити в A тянем с силой F, поэтому $T = F$ во всех точках. Нить тянет груз m_1 вверх силой F и через подвижный блок поднимает груз m_2 — вверх уже силой $2F$ (две ветви нити). Груз m_2 покоится на подставке, пока эта сила меньше его веса. Ускорение груза m_1 найдём из второго закона Ньютона. Идея: два независимых условия — на m_2 (покой на подставке даёт верхнюю границу F) и на нить (натянутость даёт нижнюю границу $F > 0$).

Обозначения. F — сила, приложенная в A, она же сила натяжения нити; N — сила реакции подставки на груз m_2; S — сила, с которой

подвижный блок связан с грузом m_2 (по стержню); a — проекция ускорения груза m_1 на ось y, направленную вверх.

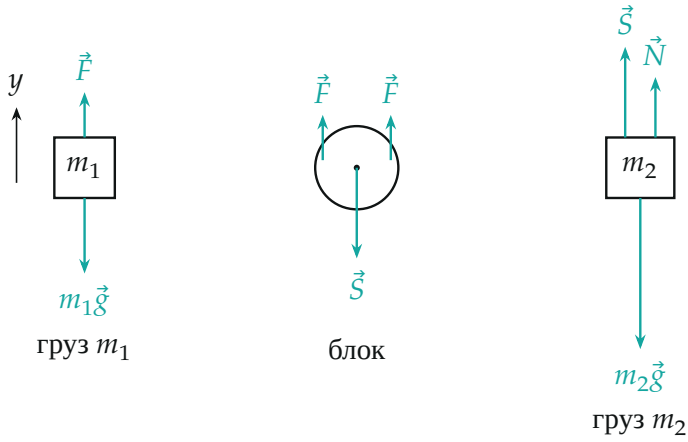


Рис. 2. Силы на груз m_1, на подвижный блок и на груз m_2

1. Груз m_1. Запишем второй закон Ньютона для груза m_1 в проекции на ось y (вверх): на него действуют сила натяжения нити F вверх и сила тяжести m_1g вниз (рис. 2, слева):

$$m_1a = F - m_1g \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m_1} - g. \tag{1}$$

2. Подвижный блок и груз m_2. Блок невесомый, поэтому сумма сил на него равна нулю (иначе при нулевой массе ускорение было бы бесконечным): две ветви нити тянут его вверх с силой F каждая, груз m_2 тянет вниз с силой S:

$$2F - S = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 2F.$$

Груз m_2 покоится на подставке: вверх на него действуют сила $S = 2F$ стержня и реакция подставки N, вниз — сила тяжести m_2g:

$$N + 2F = m_2g \quad \Rightarrow \quad N = m_2g - 2F. \tag{2}$$

3. Условие «не отрывается от подставки». Подставка может только толкать груз вверх: $N \geq 0$. Из (2)

$$m_2 g - 2F \geq 0 \quad \Rightarrow \quad F \leq \frac{m_2 g}{2}.$$

При $F = m_2 g/2$ груз m_2 как раз готов оторваться ($N = 0$).

4. Условие «нить натянута». Нить натянута, когда сила натяжения положительна: $F > 0$. При $F = 0$ нить провисает и m_1 свободно падает. Итого

$$0 < F \leq \frac{m_2 g}{2}.$$

5. Ускорение груза m_1. Подставим границы F в (1). Ускорение растёт с F линейно (рис. 3): нижняя граница даёт $a \to -g$ (при $F \to 0$ груз падает свободно, но $F = 0$ исключено — нить обязана быть натянутой), верхняя — $a = \dfrac{m_2 g}{2m_1} - g$:

$$-g < a \leq g\left(\frac{m_2}{2m_1} - 1\right).$$

Здесь $a > 0$ — ускорение вверх, $a < 0$ — вниз. Если $m_2 < 2m_1$, верхняя граница отрицательна: груз m_1 при любой допустимой силе движется с ускорением вниз.

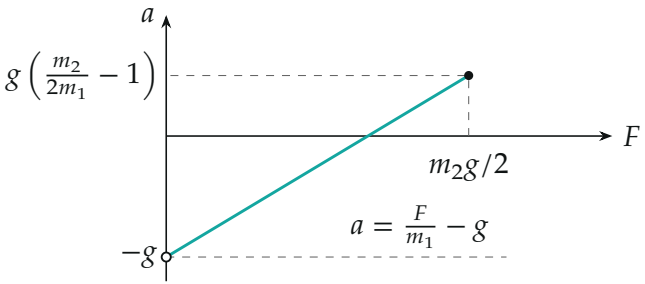


Рис. 3. Ускорение груза m_1 в зависимости от F (нарисовано для $m_2 > 2m_1$); пустой кружок — значение не достигается, чёрный — достигается

Обратите внимание. Ускорение m_1 не связано с движением m_2: груз m_2 и подвижный блок неподвижны, а нить свободно скользит через бло-

ки, потому что её конец A мы тянем так, как нужно. Поэтому a может быть любым в найденном интервале, а не одним значением. Второе: сила на m_2 от нити равна $2F$, а не F — подвижный блок даёт выигрыш в силе вдвое.

Проверка. Размерность: F — сила, $m_2g/2$ — тоже; a — м/с^2. Предел $m_1 \to \infty$: нить не может разогнать тяжёлый груз, $a \to -g$ (груз падает с ускорением свободного падения, натяжение мало по сравнению с m_1g). Контроль на границе: при $F = m_2g/2$ груз m_2 не давит на подставку ($N = 0$), и $a = \dfrac{m_2g}{2m_1} - g$; если $m_2 = 2m_1$, то $a = 0$ — груз m_1 в равновесии, как и положено.

Смысл: чем сильнее тянем за конец нити, тем быстрее поднимается m_1, но потолок для F ставит вес m_2: сильнее $m_2g/2$ уже нельзя — подвижный блок поднял бы m_2.

Ответ. $0 < F \le \dfrac{m_2g}{2}$; $-g < a \le g\left(\dfrac{m_2}{2m_1} - 1\right)$, где $a > 0$ соответствует направлению вектора $\vec{a}$ вверх.