Динамометр в космосе

Задача 1. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 1] В далёком космосе оказался школьный динамометр, корпус которого имеет массу $M = 20$ г, а пружина имеет массу $m = 10$ г. За крючок, укрепленный на корпусе, тянут с силой $F_1 = 5$ Н, направленной вдоль оси пружины, а за крючок, находящийся на свободном конце пружины, тянут с силой $F_2 = 2$ Н, направленной в сторону, противоположную силе F_1. Что будет «показывать» динамометр, то есть напротив какого деления на шкале остановится индикаторная стрелка?

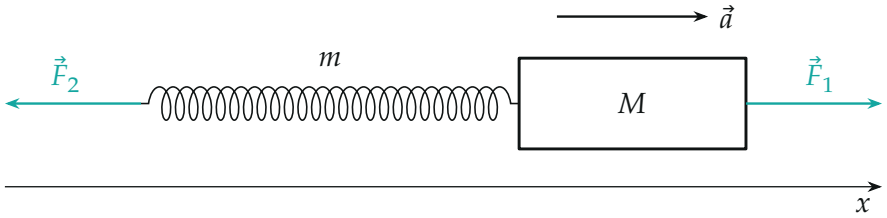


Рис. 1. Динамометр: корпус M справа, пружина m слева; обе силы тянут наружу, ось x направлена по $\vec{F}_1$

▲ **Решение. Что происходит.** Динамометр в космосе тянут за оба конца разными силами, поэтому он разгоняется целиком, как одно тело. Пружина не невесома: каждый её виток тоже разгоняется, значит, сила упругости вдоль пружины меняется от F_2 у свободного конца до некоторого N у корпуса. Стрелка показывает растяжение пружины, а шкала проградуирована в ньютонах для пружины без массы, поэтому показание — это *средняя* сила вдоль пружины. Законы: второй закон Ньютона для корпуса, пружины и всей системы; закон Гука для малого кусочка пружины.

Обозначения. Ось x — вдоль $\vec{F}_1$ (рис. 1). a — ускорение динамометра, N — сила, с которой корпус и пружина действуют друг на друга в месте крепления, k — жёсткость пружины, l — её длина.

1. Ускорение. Второй закон Ньютона для всей системы «корпус + пружина» в проекции на ось x (внешние силы только F_1 и F_2, тяжести нет):

$$F_1 - F_2 = (M+m)\,a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_1 - F_2}{M+m} = \frac{3\text{ Н}}{0{,}03\text{ кг}} = 100\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

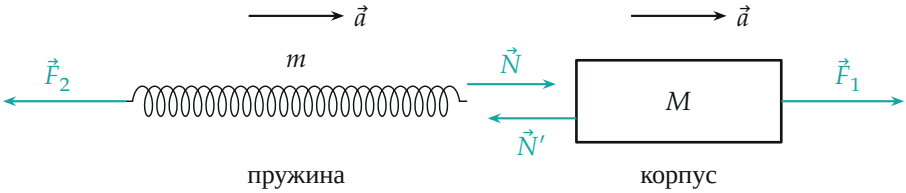


Рис. 2. Силы вдоль оси x: на пружину действуют F_2 и N, на корпус — F_1 и $N' = N$

2. Сила в месте крепления. Запишем второй закон Ньютона для корпуса в проекции на x (рис. 2). Со стороны пружины на корпус действует сила N' назад, по третьему закону Ньютона $N' = N$:

$$F_1 - N = Ma \quad \Rightarrow \quad N = F_1 - Ma = \frac{mF_1 + MF_2}{M+m} = 3\text{ Н}.$$

Проверим вторым законом Ньютона для пружины: $N - F_2 = ma = 1$ Н, и действительно $3 - 2 = 1$. Значит, у корпуса пружину тянут силой $N = 3$ Н, а на свободном конце — $F_2 = 2$ Н.

3. Как сила меняется вдоль пружины. Возьмём кусочек пружины на расстоянии x' от свободного конца длиной dx' и массой $dm = m\,dx'/l$. Он разгоняется с тем же a, поэтому разность сил на его концах $dT = dm\,a = \dfrac{ma}{l}\,dx'$ постоянна на единицу длины. Значит, сила линейно растёт от F_2 до N (рис. 3):

$$T(x') = F_2 + \frac{N - F_2}{l}\,x'.$$

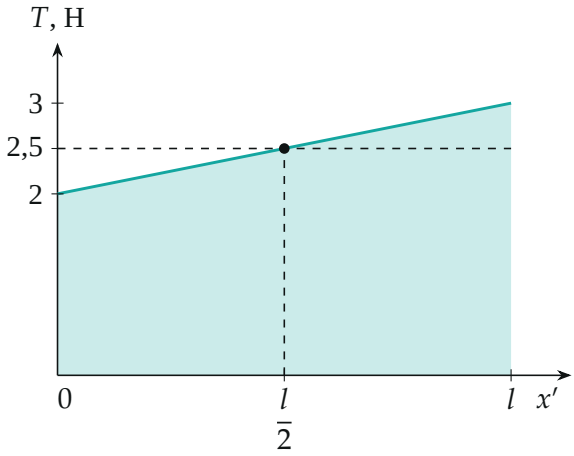


Рис. 3. Сила упругости вдоль пружины: от 2 Н на свободном конце до 3 Н у корпуса; заливка — площадь, пропорциональная полному растяжению

4. Растяжение и показание. Кусочек dx' — это короткая пружина жёсткостью kl/dx', она растягивается на $d(\Delta) = \dfrac{T\,dx'}{kl}$ (закон Гука для кусочка). Суммируем по всей пружине:

$$\Delta = \frac{1}{kl}\int_0^l T\,dx' = \frac{T_{\text{ср}}}{k}, \qquad T_{\text{ср}} = \frac{F_2 + N}{2},$$

потому что T меняется линейно (площадь трапеции на рис. 3 равна площади прямоугольника высотой $T_{\text{ср}}$). Стрелка остановится там, где шкала показывает силу $k\Delta = T_{\text{ср}}$ — это сила в середине пружины.

Соберём ответ.

$$F = \frac{F_2 + N}{2} = F_2 + \frac{m(F_1 - F_2)}{2(M+m)} = \frac{m(F_1+F_2) + 2MF_2}{2(M+m)}$$
$$= \frac{10\cdot 7 + 2\cdot 20\cdot 2}{2\cdot 30}\ \text{Н} = 2{,}5\ \text{Н}.$$

Обратите внимание. Показание не равно ни $F_1 = 5$ Н, ни $F_2 = 2$ Н: пока витки пружины разгоняются, сила вдоль неё не одинакова, и показывает стрелка среднюю.

Проверка. Размерность: $m(F_1 + F_2)/(M + m)$ — сила. Предел $m \to$

0: $F \to F_2$ — у пружины без массы сила одна по всей длине и равна приложенной к её концу, а разгоняется только корпус. Предел $M \to 0$: корпус без массы, $N = F_1$ и $F = (F_1 + F_2)/2$, как и даёт формула. Второй способ: $F = F_1 - \dfrac{M + m/2}{M + m}(F_1 - F_2)$ — от F_1 отнимается сила, нужная, чтобы разогнать корпус и половину пружины: $5 - \frac{25}{30} \cdot 3 = 2{,}5$ Н.

Ответ. $F = \dfrac{m(F_1 + F_2) + 2MF_2}{2(M + m)} = 2{,}5$ Н: стрелка остановится у деления 2,5 Н.