Шарик и клин

Задача 2. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 2] На гладкой горизонтальной поверхности находится жесткий клин массой M, причем его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жесткий шарик массой m, у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. При каком отношении m/M шарик после удара будет двигаться в вертикальном направлении?

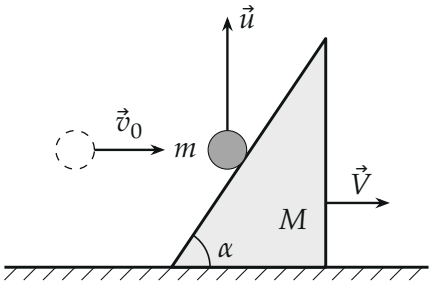


Рис. 1. Поясняющий рисунок: шарик m летит со скоростью $\vec{v}_0$ (пунктир — прежнее положение), в момент удара касается наклонной грани; после удара его скорость $\vec{u}$ вертикальна, клин M уезжает со скоростью $\vec{V}$

▲ **Решение. Что происходит.** Это удар шарика о гладкую грань подвижного клина. Сила удара — нормальная реакция грани, направленная перпендикулярно ей, поэтому вдоль грани сил на шарик нет и его импульс вдоль грани сохраняется. Вдоль горизонтали сохраняется импульс всей системы: внешние силы (тяжесть, реакция стола) вертикальны. Третье уравнение — энергия, ведь удар абсолютно упругий. Три уравнения, три неизвестных: скорость шарика после удара u, скорость клина V и искомое m/M.

Обозначения. Ось x — горизонтально по $\vec{v}_0$, ось y — вверх. $\vec{t} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ — единичный вектор вдоль грани (она поднимается вправо), $\vec{n} = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha)$ — единичная нормаль к ней, в сторону шарика. v_0 — скорость шарика до удара, u — после (по условию вертикальна,

вверх), V — скорость клина после удара (горизонтальна: стол гладкий, а вверх клин ехать не может).

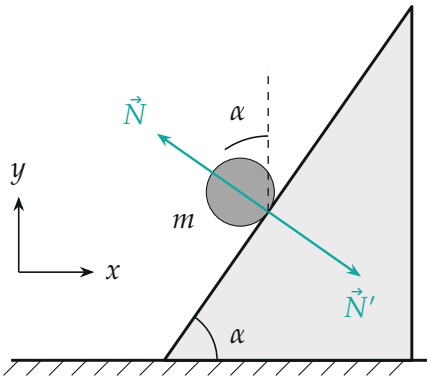


Рис. 2. Момент удара: на шарик действует сила $\vec{N}$ по нормали $\vec{n}$, на клин — сила $\vec{N}' = -\vec{N}$; угол между нормалью и вертикалью равен α

1. Сохранение горизонтальной проекции импульса системы. Рассмотрим систему «шарик + клин» за время удара. Внешние силы — тяжесть и реакция стола — вертикальны, значит, горизонтальная проекция импульса не меняется. Перед ударом клин покоится, после удара шарик летит вертикально (его горизонтальная проекция равна нулю):

$$mv_0 = MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M} v_0.$$

Вертикальный импульс системы не сохраняется: стол толкает клин вверх в момент удара, и эту силу трогать нельзя.

2. Сохранение проекции импульса шарика на наклонную грань. Грань гладкая, сила, действующая на шарик в ударе, направлена по $\vec{n}$ и вдоль $\vec{t}$ проекции не имеет, значит, проекция импульса шарика на $\vec{t}$ не меняется. До удара $\vec{v} = (v_0, 0)$, $\vec{v} \cdot \vec{t} = v_0 \cos\alpha$; после — $\vec{v} = (0, u)$, $\vec{v} \cdot \vec{t} = u \sin\alpha$:

$$mv_0 \cos\alpha = mu \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad u = v_0 \operatorname{ctg}\alpha.$$

Геометрически (рис. 3): концы векторов $\vec{v}_0$ и $\vec{u}$ проектируются на касательную в одну точку K, значит, изменение скорости $\Delta\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}_0$

перпендикулярно грани, то есть направлено вдоль силы удара.

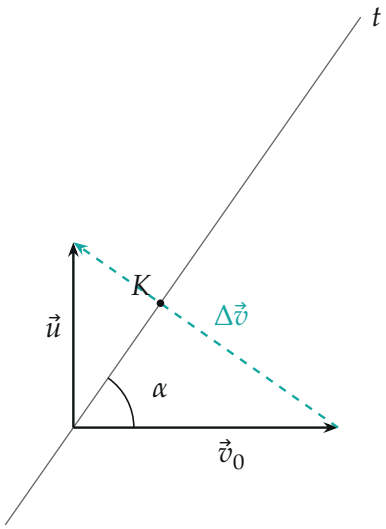


Рис. 3. Скорости шарика до и после удара: концы $\vec{v}_0$ и $\vec{u}$ проектируются на касательную t в одну точку K, поэтому $\Delta\vec{v}$ перпендикулярно t

3. Сохранение механической энергии. Удар абсолютно упругий, тепла нет, а потенциальная энергия за мгновение удара не меняется (шарик и клин остаются на месте). Значит, кинетическая энергия системы сохраняется:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

4. Решаем систему. Подставим $u = v_0 \operatorname{ctg}\alpha$ и $V = mv_0/M$ из пунктов 1–2 в уравнение энергии и сократим на $mv_0^2/2$:

$$1 = \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{m}{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} = 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Такое m/M положительно только при $\alpha > 45°$ (рис. 4): при пологой грани шарик вертикально не отлетит ни при каких массах. При $\alpha \to 90°$ грань почти вертикальна, $m/M \to 1$.

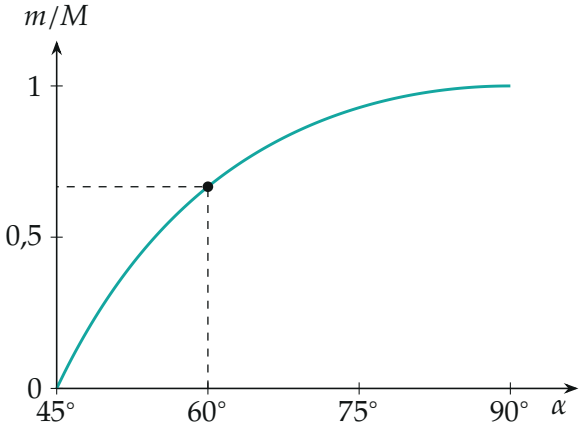


Рис. 4. Нужное отношение масс как функция угла грани; при 60° оно равно 2/3 (пунктир)

Обратите внимание. Нельзя сохранять полный импульс системы: стол действует на клин вертикальной силой, и вертикальная проекция импульса меняется. Именно поэтому для шарика пришлось взять проекцию на грань, где сил нет.

Проверка. Размерность: m/M и $\operatorname{ctg}\alpha$ безразмерны. Числовой пример: $\alpha = 60°$, $m/M = 2/3$, возьмём $m = 2$, $M = 3$, $v_0 = 3$: тогда $u = 3\operatorname{ctg}60° = \sqrt{3}$, $V = mv_0/M = 2$, и энергия до $mv_0^2/2 = 9$, после $\frac{2\cdot3}{2} + \frac{3\cdot4}{2} = 3 + 6 = 9$ — совпадает. Предел $M \to \infty$ (неподвижная стенка): $m/M \to 0$ требует $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$ — известный случай: отражение от стенки под 45° превращает горизонтальную скорость в вертикальную. Шарик после удара больше не заденет клин: клин уезжает вправо, шарик летит вверх.

Ответ. $\dfrac{m}{M} = 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$ (возможно при $\alpha > 45°$).