Плавающий корабль в тяжёлом газе (молярная масса)

Задача 4. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 4] В интернете сейчас можно легко найти видеозаписи различных физических опытов, в частности, такого:

Группа студентов напускает в большое корыто до краев какой-то тяжелый газ из баллона, а потом кладет на поверхность этого газа в корыте модель корабля, согнутую из алюминиевой фольги, и этот «корабль» плавает, как настоящий «летучий голландец»! Потом студенты зачерпывают ковшиком газ из корыта, переливают его внутрь «корабля», и он тонет.

Найдите, какой минимальной молярной массой M должен обладать этот тяжелый газ, чтобы в нем мог плавать «корабль» в форме прямоугольного параллелепипеда (с открытым верхом), согнутый из бытовой алюминиевой фольги толщиной $h = 25$ мкм. Размеры «корабля»: длина $a = 50$ см, ширина $b = 20$ см, высота бортов $c = 10$ см. Считать, что лишние куски, образовавшиеся при сгибании параллелепипеда из листа фольги, удалены. Плотность алюминия $\rho_{\text{Al}} = 2{,}7$ г/см^3, плотность воздуха при данных условиях равна $\rho_{\text{в}} = 1{,}3$ кг/м^3, средняя молярная масса воздуха $M_{\text{в}} = 29$ г/моль.

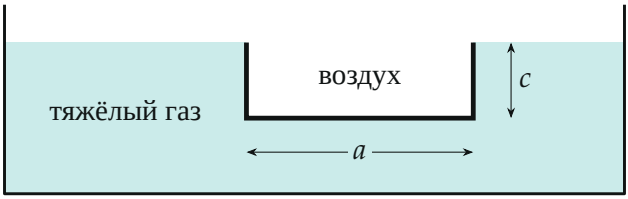


Рис. 1. Поясняющий рисунок (вид сбоку): корабль в корыте, заполненном тяжёлым газом, внутри — воздух; борт доходит до поверхности газа

▲ **Решение. Что происходит.** Тяжёлый газ действует на корабль архимедовой силой, как жидкость: корабль погружён в газ на всю высоту бортов (глубже опускаться нельзя — газ зальёт внутрь), и сила равна весу газа в объёме abc. Удержать нужно вес фольги и воздуха внутри корабля. Чем легче газ, тем меньше сила, поэтому есть минимальная плотность,

а через неё — минимальная молярная масса. Законы: условие плавания тела и уравнение Клапейрона — Менделеева.

Обозначения. m_{Al} — масса фольги, $m_в$ — масса воздуха в корабле, $\rho_г$ и M — плотность и молярная масса тяжёлого газа, S — площадь фольги, $V = abc$ — объём корабля.

1. Масса фольги. Корабль — коробка без крышки: дно ab и четыре борта, два площадью ac и два — bc (рис. 2 — развёртка). Лишние куски удалены, поэтому

$$S = ab + 2ac + 2bc = ab + 2(a + b)c = 0{,}1 + 0{,}14 = 0{,}24 \text{ м}^2.$$

Толщина h, значит, объём металла $Sh = 6 \cdot 10^{-6}$ м^3 и

$$m_{Al} = \rho_{Al} S h = 2700 \cdot 0{,}24 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \text{ кг} = 0{,}0162 \text{ кг} = 16{,}2 \text{ г}.$$

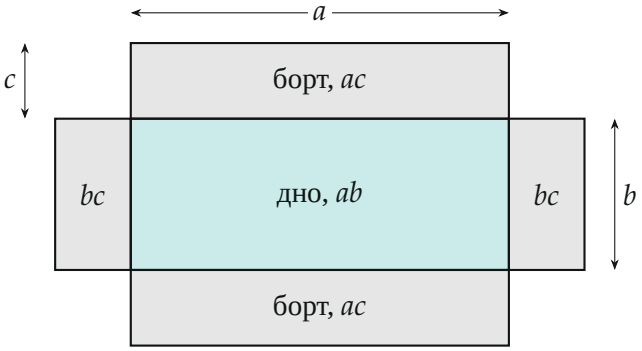


Рис. 2. Развёртка корабля: дно ab и четыре борта; площадь фольги $S = ab + 2ac + 2bc$ (лишние уголки удалены)

2. Масса воздуха в корабле. Внутри корабля воздух объёма $abc = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$ м^3:

$$m_в = \rho_в abc = 1{,}3 \cdot 0{,}01 \text{ кг} = 13 \text{ г}.$$

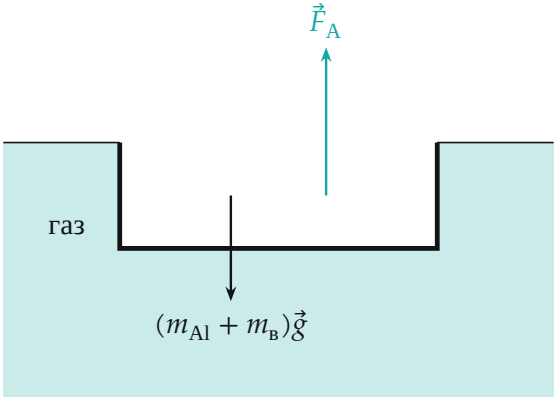


Рис. 3. Силы на корабль с воздухом внутри: вес фольги и воздуха вниз, архимедова сила газа вверх

3. Условие плавания. Рассмотрим корабль вместе с воздухом внутри как одно тело (рис. 3). На него действуют сила тяжести $(m_{Al} + m_в)g$ и архимедова сила тяжёлого газа, вытесненного объёмом abc (объёмом самой фольги, около 6 см^3, против 10 л можно пренебречь). Тело плавает, пока сила тяжести не больше архимедовой:

$$(m_{Al} + m_в)\, g \le \rho_г\, g\, abc \quad \Rightarrow \quad \rho_г \ge \frac{m_{Al} + m_в}{abc}.$$

Числа: $\rho_г \ge \dfrac{0{,}0162 + 0{,}013}{0{,}01}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 2{,}92\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Минимальная молярная масса соответствует равенству (борт у самой поверхности газа).

4. От плотности к молярной массе. Тяжёлый газ и воздух — при одинаковых давлении p и температуре T. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для массы газа m_0: $pV_0 = \dfrac{m_0}{\mu}RT$, откуда плотность $\rho = \dfrac{p\mu}{RT}$ пропорциональна молярной массе μ. Поэтому

$$\frac{\rho_г}{\rho_в} = \frac{M}{M_в} \quad \Rightarrow \quad M = M_в \frac{\rho_г}{\rho_в} = M_в \frac{m_{Al} + m_в}{m_в}.$$

Числа: $M = 29 \cdot \dfrac{29{,}2}{13}\ \dfrac{\text{г}}{\text{моль}} \approx 65\ \dfrac{\text{г}}{\text{моль}}$. В общем виде, подставляя

$m_{\text{Al}} = [2(a+b)c + ab]\,h\rho_{\text{Al}}$ и $m_{\text{в}} = abc\rho_{\text{в}}$:

$$M \geq M_{\text{в}}\Big(1 + \frac{[2(a+b)c + ab]\,h\rho_{\text{Al}}}{abc\,\rho_{\text{в}}}\Big).$$

Обратите внимание. Воздух внутри корабля надо учесть: его вес 13 г сравним с весом самой фольги 16 г. Отношение $\rho_{\text{г}}/\rho_{\text{в}}$ берётся при тех же p и T — тогда R, p и T сокращаются.

Проверка. Размерность: ρSh — масса, $\rho_{\text{г}}/\rho_{\text{в}}$ безразмерно, M в г/моль. Предел $h \to 0$: $m_{\text{Al}} \to 0$, $M \to M_{\text{в}}$ — корабль без веса плавает в газе той же плотности, что воздух внутри, как и должно быть. Реалистичность: углекислый газ (44 г/моль) не подходит, элегаз SF_6 (146 г/моль) подходит с запасом — на нём такой опыт и показывают. Второй способ для первого пункта: $2{,}92/1{,}3 = 2{,}25$, $29 \cdot 2{,}25 = 65{,}1$ г/моль.

Ответ. $M \geq M_{\text{в}}\Big(1 + \dfrac{[2(a+b)c + ab]\,h\rho_{\text{Al}}}{abc\,\rho_{\text{в}}}\Big) \approx 65$ г/моль.