Три батарейки

Задача 5. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 5] Из трех одинаковых батареек собрали цепь, схема которой изображена на рисунке. Что покажет вольтметр, подключенный к выводам 1 и 2? ЭДС каждой из батареек равна $\mathcal{E}$.

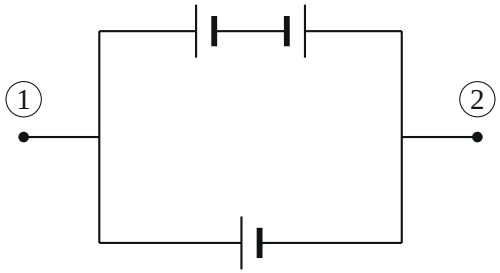


Рис. 1. Схема из условия: сверху две батарейки включены навстречу друг другу, снизу одна; длинная черта — плюс батарейки

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вольтметр считаем идеальным: ток через него не идёт, и показание — разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между выводами. Батарейки реальные: у каждой есть внутреннее сопротивление r, оно у одинаковых батареек одно и то же. Две верхние батарейки включены навстречу: их ЭДС вычитаются и дают нуль, а сопротивления складываются. Значит, верхняя ветвь действует как обычный резистор $2r$, а нижняя батарейка гонит ток по контуру через этот резистор и собственное сопротивление r. Законы: правило Кирхгофа для контура и закон Ома для участка с ЭДС.

Обозначения. r — внутреннее сопротивление одной батарейки, I — ток в контуре, $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — показание вольтметра. Ответ не должен зависеть от r: оно в условии не задано.

1. Эквивалентная схема. Каждую батарейку представим идеальной ЭДС $\mathcal{E}$ последовательно с сопротивлением r. Верхняя ветвь: две ЭДС встречные, сумма $\mathcal{E} - \mathcal{E} = 0$, сопротивление $r + r = 2r$ (рис. 2). Нижняя ветвь: ЭДС $\mathcal{E}$ и сопротивление r.

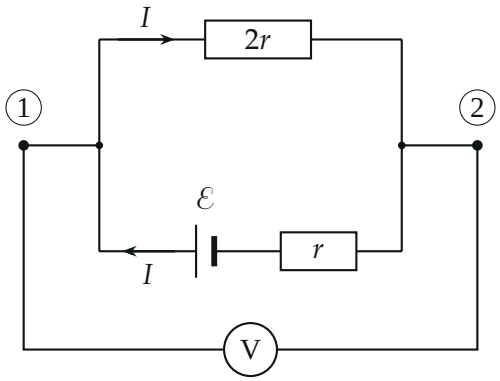


Рис. 2. Эквивалентная схема с внутренними сопротивлениями; ток I течёт по контуру по часовой стрелке; вольтметр (идеальный) присоединён к выводам 1 и 2

2. Ток в контуре. Ток через вольтметр не идёт, поэтому по всему контуру течёт один ток I. Правило Кирхгофа для контура «нижняя ветвь — верхняя ветвь»: сумма ЭДС вдоль обхода (включая знак) равна сумме падений напряжения на сопротивлениях. Обойдём контур по направлению тока (рис. 2): нижняя ЭДС $\mathcal{E}$ помогает току, верхние ЭДС вдоль обхода дают $-\mathcal{E} + \mathcal{E} = 0$, сопротивление контура $r + 2r = 3r$:

$$\mathcal{E} = I \cdot 3r \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{3r}.$$

3. Показание вольтметра. Найдём разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ по нижней ветви. Закон Ома для участка с ЭДС: ток I идёт внутри батарейки от минуса к плюсу, и напряжение на её выводах меньше ЭДС на падение Ir на внутреннем сопротивлении:

$$U = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{3} = \frac{2\mathcal{E}}{3}.$$

Вывод 1 — у плюса нижней батарейки, потенциал φ_1 выше. Тот же результат по верхней ветви: ЭДС в сумме нуль, значит, $U = I \cdot 2r = \dfrac{2\mathcal{E}}{3}$.

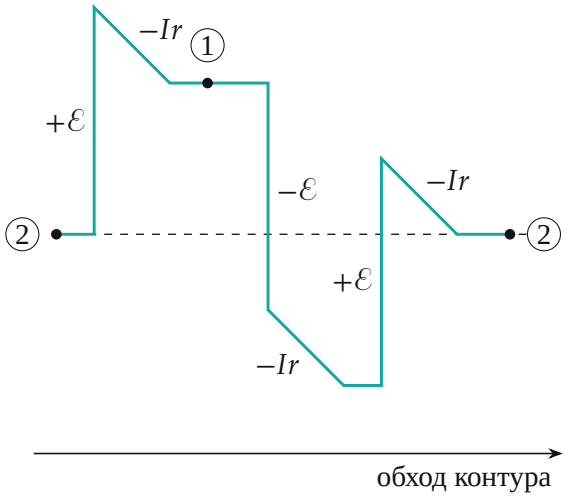


Рис. 3. Потенциал при обходе контура от вывода 2: нижняя батарейка поднимает его на $\mathcal{E}$, сопротивления уменьшают на $Ir = \mathcal{E}/3$ каждое, верхние ЭДС идут навстречу; на выводе 1 потенциал выше на $2\mathcal{E}/3$

Обратите внимание. Внутреннее сопротивление нельзя отбросить: у идеальных батареек с нулевым сопротивлением ток в контуре не определился бы. У реальных оно есть, но у одинаковых батареек одно и то же и в ответе сокращается.

Проверка. Размерность: вольты. Предел: если убрать верхнюю ветвь, ток не течёт и $U = \mathcal{E}$; наши $2\mathcal{E}/3$ меньше — ток отбирает часть. Второй способ (метод узловых потенциалов): ветвь с ЭДС $\mathcal{E}_i$ и сопротивлением R_i имеет проводимость $1/R_i$, и $U = \dfrac{\sum \mathcal{E}_i/R_i}{\sum 1/R_i} = \dfrac{\mathcal{E}/r + 0}{1/r + 1/(2r)} = \dfrac{2\mathcal{E}}{3}$. Обход контура на рис. 3 замкнулся: три скачка ЭДС в сумме дают $\mathcal{E} - \mathcal{E} + \mathcal{E} = \mathcal{E}$, три падения $3Ir = \mathcal{E}$ возвращают потенциал к исходному.

Ответ. Вольтметр покажет $U = \dfrac{2\mathcal{E}}{3}$.