Грузики на нити-треугольнике

Задача 6. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 6] На горизонтальном столе находятся два одинаковых грузика, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, образующей равнобедренный треугольник AOB (см. рис.). Углы при основаниях треугольника равны α. В точке O к этой нити привязана другая нить, которую удерживают вертикально слегка натянутой. С каким минимальным ускорением нужно начать поднимать точку O, чтобы грузы оторвались от стола в момент начала своего движения?

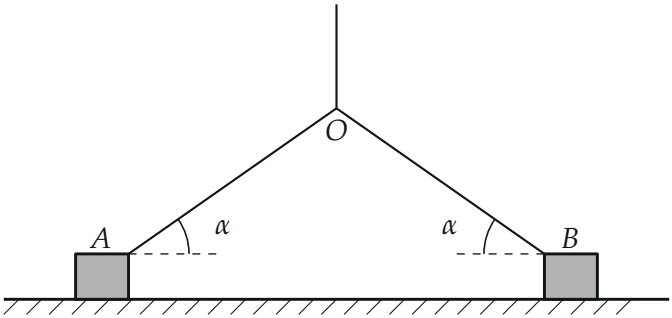


Рис. 1. Схема из условия: грузики A и B на столе, нить AOB и вертикальная нить в точке O

▲ **Решение.** **Что происходит.** Точку O тянут вверх, нить AOB тянет грузики к центру и немного вверх. Пока реакция стола $N > 0$, грузики остаются на столе и скользят по нему горизонтально, а нерастяжимость нити жёстко связывает их горизонтальное ускорение с ускорением точки O. Из второго закона Ньютона для грузика получается, что N убывает с ростом ускорения точки O; грузики оторвутся сразу, когда $N = 0$ уже при старте. Главная идея — связь ускорений через нерастяжимость нити, и в момент старта она особенно проста: скорости нулевые.

Обозначения. Ось x — по столу к центру (для A вправо), ось y — вверх. m — масса грузика, T — натяжение нити OA (нить невесома, поэтому по всей длине оно одно), a — ускорение точки O (вверх), a_x — горизонтальное ускорение грузика, N — реакция стола, L — длина участка OA.

1. Связь ускорений. Пусть точка O на высоте h над точкой крепления нити к грузику A (эта точка скользит по столу и остаётся на одной высоте), а по горизонтали от вертикали через O грузик отстоит на s. Нить нерастяжима: $L^2 = h^2 + s^2 = \text{const}$. Дифференцируем по времени дважды:

$$h\ddot{h} + \dot{h}^2 + s\ddot{s} + \dot{s}^2 = 0.$$

В момент старта скорости равны нулю: $\dot{h} = \dot{s} = 0$, остаётся $h\ddot{h} + s\ddot{s} = 0$. Здесь $\ddot{h} = a$, а $\ddot{s} = -a_x$ (грузик движется к центру, s уменьшается), и $h/s = \operatorname{tg}\alpha$:

$$a_x = a\,\frac{h}{s} = a\operatorname{tg}\alpha.$$

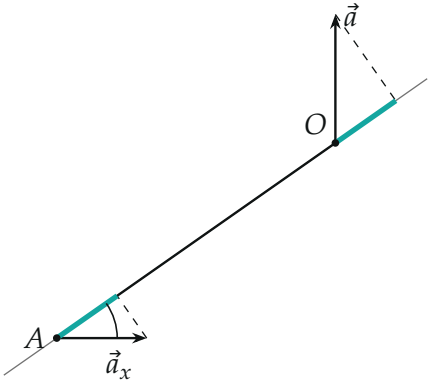


Рис. 2. Ускорение точки O вертикально, ускорение грузика — вдоль стола; их проекции на нить OA равны (жирные отрезки), потому что при нулевых скоростях длина нити не меняется

2. Второй закон Ньютона для грузика. Рассмотрим грузик A в момент старта, когда он ещё на столе (рис. 3). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ вдоль AO (под углом α к столу) и реакция стола $\vec{N}$ вверх; трения нет. Проекции на оси:

$$x:\ T\cos\alpha = ma_x, \qquad y:\ T\sin\alpha + N - mg = 0.$$

Вертикального ускорения у грузика нет: он скользит по столу (в момент отрыва $N = 0$, но ускорение ещё нулевое — условие минимальности).

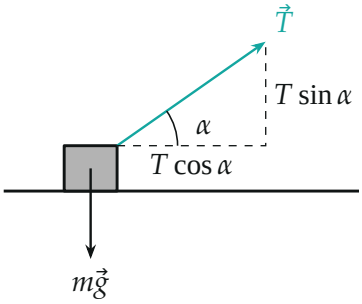


Рис. 3. Силы на грузик A в момент отрыва: тяжесть и натяжение нити T (реакция стола $N = 0$); натяжение разложено на горизонтальную и вертикальную составляющие

3. Условие отрыва. Из горизонтального уравнения и связи ускорений $T = \dfrac{ma_x}{\cos\alpha} = \dfrac{ma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}$, значит $T\sin\alpha = ma\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$. Вертикальное уравнение даёт реакцию стола:

$$N = mg - T\sin\alpha = m\,(g - a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha).$$

Чем больше a, тем меньше N (рис. 4). Грузики оторвутся сразу при $N = 0$:

$$g = a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \quad\Rightarrow\quad a_{\min} = g\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha.$$

При $a \geq a_{\min}$ реакция стола обратилась бы в нуль или стала отрицательной, чего стол не может, поэтому грузик в момент старта отрывается; при $a < a_{\min}$ он ещё прижат к столу.

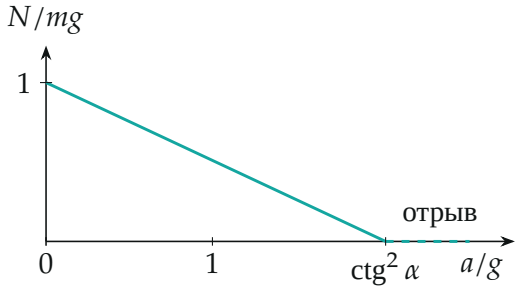


Рис. 4. Реакция стола как функция ускорения точки O при $\alpha = 35°$: от mg при $a = 0$ до нуля при $a = g\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$ (дальше — отрыв)

Обратите внимание. Ускорение грузика вдоль стола не равно ускорению точки O: $a_x = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Ошибка «нить тянет грузик с ускорением точки O» даёт неверный ответ. Связь верна только в момент старта, пока скорости равны нулю: потом к производным добавились бы члены с квадратами скоростей.

Проверка. Размерность: $g\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$ — ускорение. При $\alpha = 45°$ получаем $a_{\min} = g$: $T\sin\alpha = mg$ и $T\cos\alpha = ma_x = mg$, $a_x = a$ — сходится. При $\alpha \to 90°$ (нити почти вертикальны) $a_{\min} \to 0$: любой подъём сразу отрывает грузики. При $\alpha \to 0$ нить почти горизонтальна, и нужен огромный подъём. Второй способ: вертикальная нить тянет узел O с силой $F = 2T\sin\alpha$ (узел невесом); при отрыве $T\sin\alpha = mg$, поэтому $F = 2mg$ — и по второму закону Ньютона для всей системы «два грузика + узел» вертикальная сила F уравновешивает тяжесть $2mg$ при нулевых вертикальных ускорениях грузиков и $N = 0$.

Ответ. $a_{\min} = g\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha$.