Блоки, нити и пружина

Задача 7. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 7] В системе, изображенной на рисунке, все блоки — невесомые и вращаются без трения, все нити — невесомые и нерастяжимые (их жесткость велика по сравнению с жесткостью пружины). Пружина также невесома. Система находится в покое. При какой массе груза M груз 1 сразу после пережигания нити в точке A будет иметь ускорение большее, чем g?

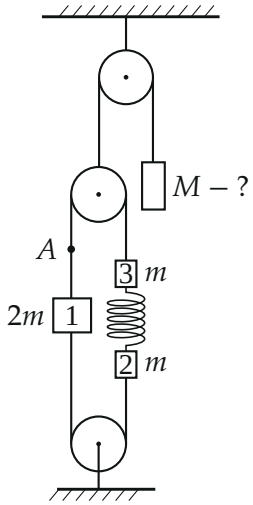


Рис. 1. Схема из условия: груз M висит на нити через неподвижный блок и держит подвижный блок, через который перекинута нить к грузам 1 и 3; груз 1 соединён нитью под нижним блоком с грузом 2, грузы 2 и 3 связаны пружиной

▲ **Решение. Что происходит.** До пережигания всё в равновесии: груз M растягивает пружину и нити. После пережигания нить в точке A перестаёт держать груз 1 сверху, а пружина за мгновение не успевает изменить длину, значит, сила упругости остаётся прежней. Груз 1 теперь связан только нижней нитью с грузом 2, а нить тянуть вниз может, но толкать вверх нет. Поэтому груз 1 обгонит свободное падение ($a > g$), только если нижняя нить тянет его вниз, то есть её натяжение положительно. Законы: второй закон Ньютона для каждого груза, условие равновесия подвижного блока и нерастяжимость нитей.

Обозначения. Ось вверх; T — натяжение нити, идущей к грузам 1 и 3 через подвижный блок, $T_н$ — натяжение нижней нити (под нижним блоком), F — сила упругости пружины (растянутая пружина тянет груз 2 вверх, груз 3 вниз). После пережигания — $T'_н$ и a — модуль ускорения груза 1 (вниз).

1. Равновесие до пережигания. Нить через неподвижный блок: блок невесом, трения нет, поэтому сила в ней по обе стороны блока равна Mg (груз M покоится). Подвижный блок невесом, значит, силы на него уравновешены: Mg вверх от нити и две силы T вниз от двух ветвей нити (на блоке без трения натяжение по обе стороны одно):

$$2T = Mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Mg}{2}.$$

Запишем условие равновесия для каждого груза (рис. 2).

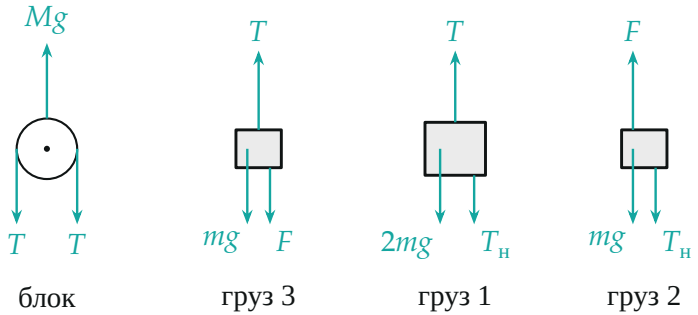


Рис. 2. Силы до пережигания: на подвижный блок, на груз 3 (пружина тянет вниз), на груз 1 и на груз 2 (пружина тянет вверх); нижняя нить тянет оба груза вниз

Груз 3: нить тянет вверх, тяжесть и растянутая пружина — вниз. Груз 1: нить сверху тянет вверх, тяжесть $2mg$ и нижняя нить — вниз. Груз 2: пружина вверх, тяжесть и нижняя нить — вниз:

$$T = mg + F, \qquad T = 2mg + T_н, \qquad F = mg + T_н.$$

Третье уравнение следует из первых двух, поэтому они согласованы. От-

сюда сила упругости через M:

$$F = T - mg = \frac{Mg}{2} - mg, \qquad T_н = \frac{Mg}{2} - 2mg.$$

Нижняя нить тянет только при $M > 4m$ — иначе до пережигания она провисала бы.

2. Сразу после пережигания. Пружина не меняет длину мгновенно, поэтому сила упругости остаётся $F = \frac{Mg}{2} - mg$. Нить, перекинутая через подвижный блок, потеряла один конец (пережжена в точке A): блок без трения, у нити нет массы, значит, натяжение с другой стороны тоже стало нулевым, и груз 3 больше нитью не удерживается. Для грузов 1 и 2 это не важно — их соединяют нижняя нить и пружина, сила которой известна.

3. Связь ускорений. Нижняя нить нерастяжима и перекинута через неподвижный блок, поэтому груз 1 опускается, а груз 2 поднимается с ускорением того же модуля a, пока нить натянута (рис. 3).

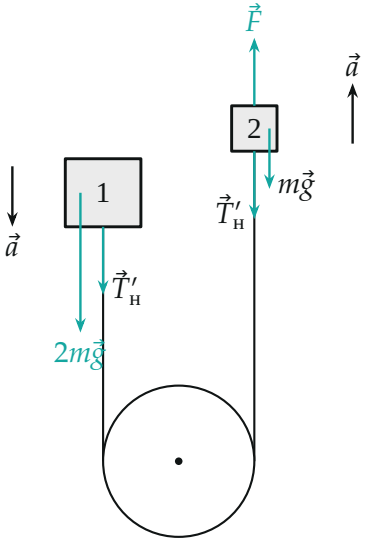


Рис. 3. Силы на грузы 1 и 2 сразу после пережигания: груз 1 ускоряется вниз, груз 2 вверх с тем же модулем ускорения; нижняя нить тянет оба груза вниз с силой $T'_н$

4. Второй закон Ньютона для грузов 1 и 2. Для груза 1 в проекции на направление его ускорения (вниз), для груза 2 — на направление его ускорения (вверх):

$$2m\,a = 2mg + T'_{\text{н}}, \qquad m\,a = F - mg - T'_{\text{н}}.$$

Сложим уравнения — неизвестная $T'_{\text{н}}$ уходит:

$$3m\,a = mg + F = mg + \frac{Mg}{2} - mg = \frac{Mg}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{M}{6m}\,g.$$

Натяжение нижней нити из первого уравнения:

$$T'_{\text{н}} = 2m(a - g) = \frac{g}{3}\,(M - 6m).$$

5. Условие $a > g$. Нить может только тянуть, поэтому $T'_{\text{н}} \geq 0$. При $M < 6m$ формула дала бы $T'_{\text{н}} < 0$ — нить провисает, груз 1 падает свободно с $a = g$ и обгонять падение не может. При $M > 6m$ нить натянута, $T'_{\text{н}} > 0$, и

$$a = \frac{M}{6m}\,g > g \quad \Leftrightarrow \quad M > 6m.$$

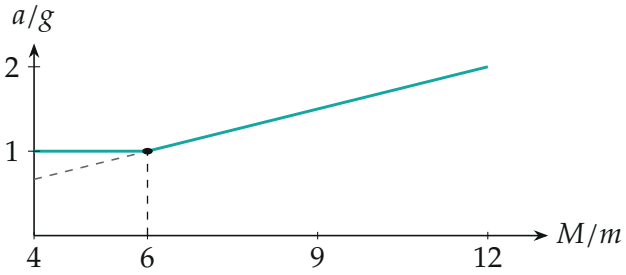


Рис. 4. Ускорение груза 1: $a = g$ при $M \leq 6m$ (нить провисает), $a = Mg/6m > g$ при $M > 6m$; пунктир — $Mg/6m$ без провисания

Обратите внимание. Нельзя считать, что натяжение T после пережигания осталось прежним, и нельзя считать, что пружина тоже сразу

«расслабилась». Сила упругости при мгновенном изменении сохраняется, а нить без второго конца силы не передаёт. Нижняя нить — односторонняя связь: она работает, только если $T'_{\text{н}} > 0$, и именно это условие даёт порог $M = 6m$.

Проверка. Размерность: $a = Mg/(6m)$ безразмерна по отношению M/m. На пороге $M = 6m$: $T'_{\text{н}} = 0$ и $a = g$, формулы сходятся с двух сторон. Числовой пример $m = 1$, $M = 9$: $F = 3{,}5\,mg$, $a = 1{,}5g$; груз 1: $2 \cdot 1{,}5g = 3g = 2g + T'_{\text{н}}$, то есть $T'_{\text{н}} = mg$; груз 2: $1{,}5g = 3{,}5g - g - g$ — верно. До пережигания при $M = 6m$ нижняя нить натянута ($T_{\text{н}} = mg > 0$), так что условие $M > 4m$ выполнено. При $M \to \infty$ сила упругости огромна, груз 2 вылетает вверх, груз 1 тянется вниз за ним, $a \propto M$.

Ответ. $M > 6m$ (при этом $a = \dfrac{M}{6m}\,g$).