Цикл с одноатомным газом

Задача 8. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 8] С одним молем одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1–2–3–4–1, как показано на рисунке в координатах p–V (давление – объем). Известно, что температура газа в точках 1 и 3 равна, соответственно, $T_1 = 300$ К и $T_3 = 1500$ К, а отношение объемов газа в точках 2 и 1 равно $V_2/V_1 = 2$. Чему равна работа, совершаемая газом за цикл?

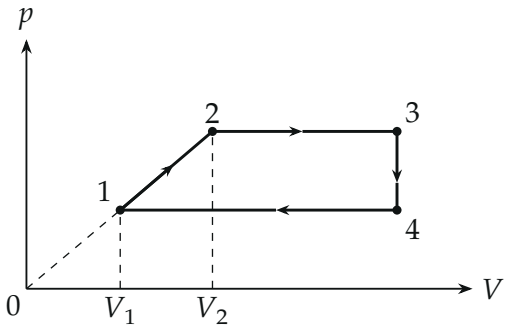


Рис. 1. График цикла из условия (качественно, не в масштабе): участок 1–2 лежит на прямой, проходящей через начало координат

▲ **Решение. Что происходит.** Работа газа за цикл — это площадь фигуры, ограниченной циклом на графике p–V (цикл идёт по часовой стрелке, значит, работа положительна). Нужно выразить эту площадь через температуры, которые даны. Помогает то, что участки цикла простые: 2–3 — изобара, 3–4 — изохора, 4–1 — изобара, а 1–2 — прямая через начало координат, на которой $p \propto V$. Законы: уравнение Клапейрона — Менделеева $pV = \nu RT$ и геометрический смысл работы.

Обозначения. $p_1 = p$, $V_1 = V$; $\nu = 1$ моль, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

1. Что известно о состояниях. На прямой через начало координат отношение p/V постоянно, значит $p_2/p_1 = V_2/V_1 = 2$: $p_2 = 2p$, $V_2 = 2V$. Изобара 2–3: $p_3 = p_2 = 2p$. Изохора 3–4: $V_4 = V_3$. Изобара 4–1: $p_4 = p_1 = p$. Неизвестными остались V_3 (и $V_4 = V_3$). Температуры:

$T_1 = \dfrac{pV}{\nu R}$, $T_2 = \dfrac{2p \cdot 2V}{\nu R} = 4T_1 = 1200$ К, $T_3 = \dfrac{2p\,V_3}{\nu R}$. Из последнего

$$pV_3 = \frac{\nu R T_3}{2}, \qquad V_3 = \frac{T_3}{2T_1}\,V = 2{,}5\,V, \qquad T_4 = \frac{pV_3}{\nu R} = \frac{T_3}{2} = 750 \text{ К}.$$

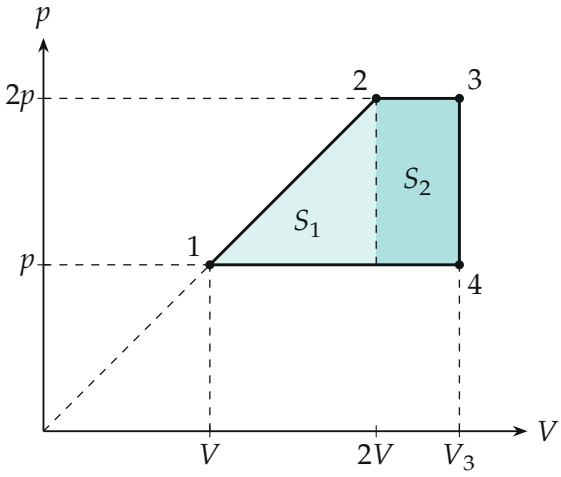


Рис. 2. Цикл в масштабе, соответствующем условию ($V_3 = 2{,}5V$): работа равна площади $S_1 + S_2$ — треугольника на участке 1–2 и прямоугольника справа от него

2. Работа как площадь. Фигуру цикла разобьём пунктиром у V_2 (рис. 2). Слева — прямоугольный треугольник с катетами $V_2 - V_1 = V$ и $p_2 - p_1 = p$, справа — прямоугольник со сторонами $V_3 - V_2 = V_3 - 2V$ и $p_2 - p_1 = p$:

$$A = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\,pV + p\,(V_3 - 2V) = pV_3 - \frac{3}{2}\,pV.$$

Цикл обходится по часовой стрелке, поэтому $A > 0$.

3. Выразим через температуры. Подставим $pV = \nu R T_1$ и $pV_3 = \dfrac{\nu R T_3}{2}$ из пункта 1:

$$A = \frac{\nu R T_3}{2} - \frac{3}{2}\,\nu R T_1 = \frac{\nu R}{2}\,(T_3 - 3T_1).$$

Числа:

$$A = \frac{8{,}31}{2}\,(1500 - 3\cdot 300)\ \text{Дж} = 4{,}155\cdot 600\ \text{Дж} \approx 2493\ \text{Дж}.$$

Обратите внимание. Дано $V_2/V_1 = 2$, а давление p_2/p_1 в условии не названо: оно получается из того, что 1–2 лежит на прямой через начало координат. Без этого ответ найти нельзя. И точка 3 — не $V_3 = 2V_2$: объём V_3 находится из T_3.

Проверка. Размерность: νRT — джоули. Второй способ: работа за цикл равна теплоте, полученной газом, минус теплота, отданная им (изменение внутренней энергии за цикл нуль). В единицах $\nu R\cdot 1\,\text{K}$ (рис. 3): на участке 1–2 $Q_{12} = \Delta U + A_{12} = \frac{3}{2}\cdot 900 + \frac{3}{2}\cdot 300 = 1800$ (работа — площадь трапеции $\frac{1}{2}(p+2p)V = \frac{3}{2}\nu RT_1$); на 2–3 — $Q_{23} = \frac{5}{2}(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\cdot 300 = 750$; на 3–4 — $Q_{34} = \frac{3}{2}(T_4 - T_3) = -1125$; на 4–1 — $Q_{41} = \frac{5}{2}(T_1 - T_4) = -1125$. Сумма: $1800 + 750 - 1125 - 1125 = 300$, то есть $A = 300\,\nu R\cdot 1\,\text{K} \approx 2493$ Дж — совпадает.

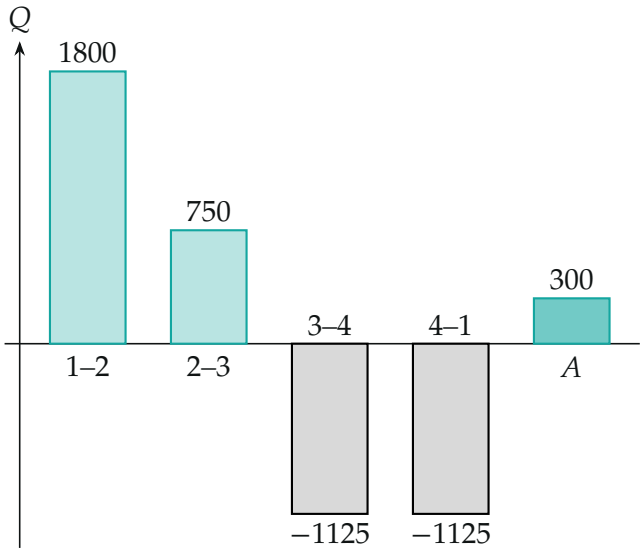


Рис. 3. Теплота на участках цикла в единицах $\nu R\cdot 1$ K: получено $1800+750 = 2550$, отдано $1125 + 1125 = 2250$, разность 300 — работа за цикл

Смысл: из полученных 2550 единиц теплоты газ превращает в работу 300 (около 12 %), остальное отдаёт холодильнику на участках 3–4 и 4–1.

Ответ. $A = \dfrac{\nu R}{2}\,(T_3 - 3T_1) \approx 2493$ Дж.