Заряженные шарик и стержень

Задача 9. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 9] Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень длиной L, массы которых m одинаковы, подвешены к потолку на нитях одинаковой большой длины $R \gg L$ (см. рис.). Нити позволяют шарику и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня. Шарику и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q, причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик сначала находился? Считайте, что диаметр шарика много меньше x, а x много меньше длины стержня.

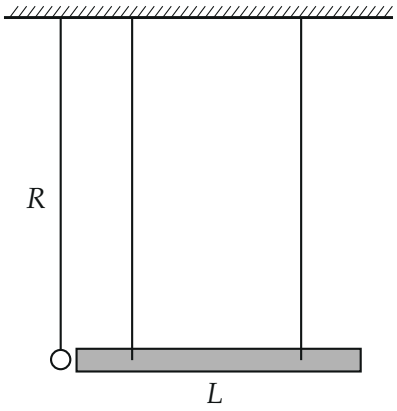


Рис. 1. Схема из условия: шарик на нити длины R и стержень на двух нитях той же длины, в начале почти касаются

▲ **Решение. Что происходит.** Заряженные шарик и стержень отталкиваются и расходятся в стороны: шарик — влево, стержень — вправо, каждый отклоняется на небольшое расстояние от вертикали. Равновесие наступает, когда горизонтальная проекция силы натяжения нити (она тянет к вертикали) уравновешивает силу электрического отталкивания.

Нити длинные ($R \gg L, x$), поэтому углы малы, и горизонтальная проекция натяжения пропорциональна смещению. Силу отталкивания шарика от стержня получим сложением по маленьким элементам стержня. Законы: условие равновесия тела на нити, закон Кулона и принцип суперпозиции.

Обозначения. Ось x — по горизонтали, вправо. d_1 — смещение шарика влево, d_2 — смещение стержня вправо, x — расстояние между шариком и ближним концом стержня, F — модуль силы взаимодействия, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

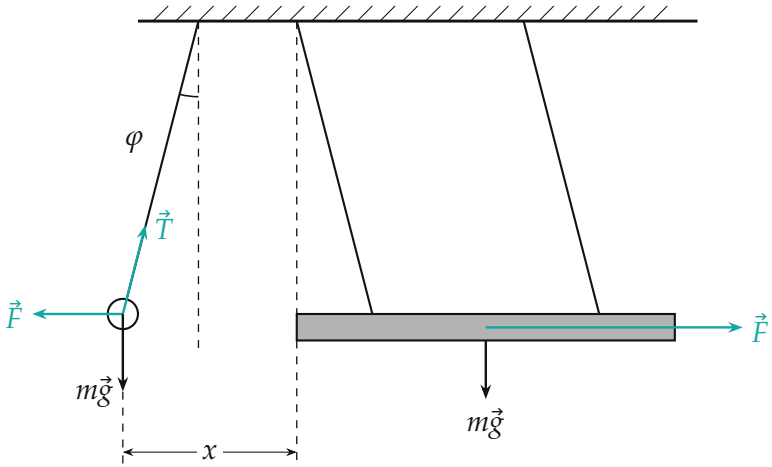


Рис. 2. Равновесие (смещения преувеличены): шарик сместился влево на d_1, стержень вправо на d_2; на шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, натяжение нити $\vec{T}$ и сила отталкивания $\vec{F}$; на стержень — равная по модулю сила $\vec{F}$ вправо и тяжесть $m\vec{g}$

1. Горизонтальная проекция натяжения. Шарик: нить отклонена от вертикали на малый угол $\varphi_1 = d_1/R$. Второй закон Ньютона для шарика в равновесии, по вертикали и горизонтали:

$$T\cos\varphi_1 = mg, \qquad T\sin\varphi_1 = F \quad \Rightarrow \quad F = mg\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 \approx mg\,\frac{d_1}{R}.$$

Стержень висит на двух параллельных нитях, поэтому остаётся горизон-

тальным и смещается целиком на d_2, нити отклонены на $\varphi_2 = d_2/R$. Для стержня сумма вертикальных проекций натяжений обеих нитей равна mg, сумма горизонтальных — силе отталкивания, которая по третьему закону Ньютона равна той же F:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 \approx mg\,\frac{d_2}{R}.$$

Отсюда $d_1 = d_2 = d$. Расстояние между шариком и ближним концом стержня выросло с нуля до $x = d_1 + d_2 = 2d$, поэтому

$$F = \frac{mg}{R}\,d = \frac{mg\,x}{2R}.$$

2. Сила отталкивания шарика от стержня. Разобьём стержень на маленькие элементы длиной dr, на расстоянии r от шарика (рис. 3). Заряд элемента $dq = \dfrac{Q}{L}\,dr$ (заряд распределён равномерно), шарик можно считать точечным. Закон Кулона для пары шарик — элемент (сила направлена вдоль стержня, так как шарик лежит на его оси):

$$dF = \frac{kQ\,dq}{r^2} = \frac{kQ^2}{L}\,\frac{dr}{r^2}.$$

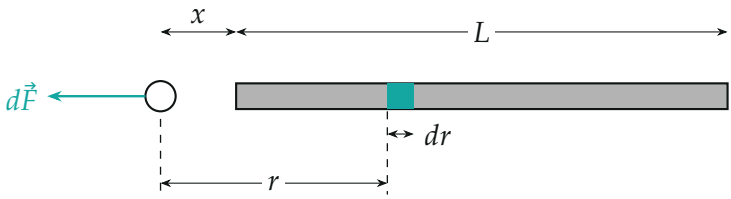


Рис. 3. Шарик слева, стержень от $r = x$ до $r = x + L$; выделен элемент длиной dr на расстоянии r от шарика

Все элементы отталкивают шарик в одну сторону, поэтому суммируем модули, то есть интегрируем по r от x до $x + L$:

$$F = \frac{kQ^2}{L}\int_x^{x+L}\frac{dr}{r^2} = \frac{kQ^2}{L}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+L}\right) = \frac{kQ^2}{x\,(x+L)} \approx \frac{kQ^2}{Lx} \qquad (x \ll L).$$

3. Равновесие. Приравняем две найденные силы F:

$$\frac{kQ^2}{Lx} = \frac{mg\,x}{2R} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2kQ^2R}{mgL} \quad \Rightarrow \quad x = Q\sqrt{\frac{2kR}{mgL}} = Q\sqrt{\frac{R}{2\pi\varepsilon_0\,mgL}}.$$

Слева сила убывает с ростом x, справа растёт, поэтому равновесие устойчиво и единственно (рис. 4): при меньшем x отталкивание сильнее и раздвигает тела, при большем — сильнее возвращающая сила нитей.

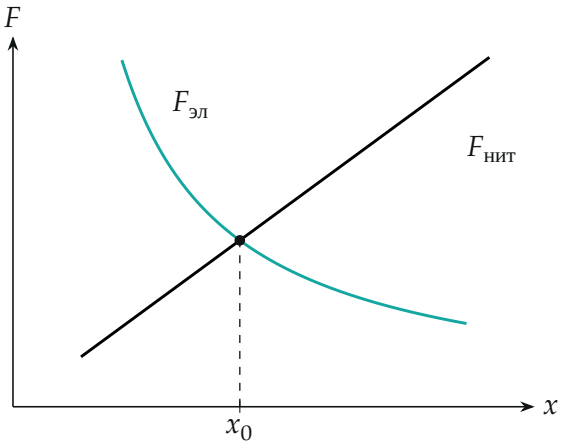


Рис. 4. Сила отталкивания $F_{эл} \propto 1/x$ убывает, возвращающая сила нитей $F_{нит} \propto x$ растёт; они равны при $x = x_0$

Обратите внимание. Расстояние x — это смещение шарика *плюс* смещение стержня: оба сдвинулись на $x/2$, а не один на x. Если взять $d_1 = x$, получится ответ в $\sqrt{2}$ раз меньше. Второе: сила шарика на стержень вдоль его оси набирается в основном от ближних элементов, поэтому дальний конец при $x \ll L$ роли почти не играет.

Проверка. Размерность: kQ^2 — Н·м^2, поэтому $\dfrac{kQ^2R}{mgL}$ — м^2, x — метры. Второй способ (энергия): потенциальная энергия взаимодействия шарика и стержня $U_{эл} = \dfrac{kQ^2}{L}\ln\dfrac{x+L}{x}$, подъём шарика и стержня при

смещении $x/2$ каждого даёт $2\cdot\dfrac{mg}{2R}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{mg\,x^2}{4R}$. Равновесие — минимум суммы: $-\dfrac{kQ^2}{x(x+L)}+\dfrac{mg\,x}{2R}=0$ — то же уравнение. Оценка: $m=10$ г, $L=20$ см, $R=2$ м, $Q=10$ нКл дают $x\approx 1{,}4$ см, то есть $x\ll L\ll R$, как требует условие. Предел: чем длиннее нити (R больше), тем слабее возвращающая сила и тем дальше разойдутся тела, $x\propto\sqrt{R}$.

Ответ. $x\approx Q\sqrt{\dfrac{2kR}{mgL}}=Q\sqrt{\dfrac{R}{2\pi\varepsilon_0\,mgL}}$.