Полноугольник и звезда

Задача 10. [МОШ 2010/11, 10 класс, задача 10] В N-полюснике (схеме с N клеммами) каждая клемма соединена с каждой другой при помощи резистора сопротивлением R (схема типа «многоугольник»). Известно, что эта схема эквивалентна схеме типа «звезда» с N клеммами, в которой N резисторов номиналом r имеют в центре общий контакт, а другим контактом соединены с соответствующей клеммой (каждый резистор соединен с одной клеммой). Как связаны друг с другом R и r?

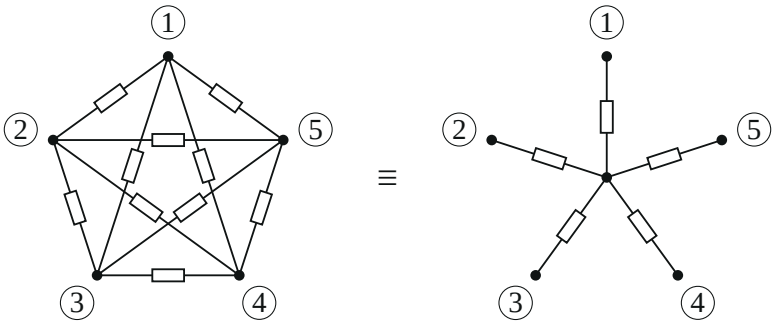


Рис. 1. Поясняющий рисунок для $N = 5$: слева «многоугольник» (все десять пар клемм соединены резисторами R), справа «звезда» из пяти резисторов r

▲ **Решение. Что происходит.** Схемы эквивалентны, если при любом подключении они ведут себя одинаково, в частности сопротивление между одной и той же парой клемм у них одно и то же. Значит, достаточно найти сопротивление между двумя клеммами в каждой схеме и приравнять. Остальные $N - 2$ клеммы никуда не подключены. В многоугольнике они по симметрии оказываются при одном потенциале — ровно посередине между двумя подключёнными, и резисторы между ними ток не пропускают: их можно убрать. Законы: правило Кирхгофа для узла и формулы последовательного и параллельного соединения.

Обозначения. i и j — две выбранные клеммы, φ_i, φ_j — их потенциалы, $U = \varphi_i - \varphi_j$ — напряжение между ними, k — любая из остальных клемм, R_{ij} — сопротивление между i и j.

1. Многоугольник: потенциалы свободных клемм. Подключим источник к клеммам i и j, остальные $N-2$ клеммы свободны. Утверждение: потенциал каждой свободной клеммы $\varphi_0 = \dfrac{\varphi_i + \varphi_j}{2}$. Проверим по правилу Кирхгофа для узла k: сумма токов в узел равна нулю. У клеммы k соседи — i, j и ещё $N-3$ свободные клеммы с тем же φ_0:

$$\frac{\varphi_i - \varphi_0}{R} + \frac{\varphi_j - \varphi_0}{R} + (N-3)\,\frac{\varphi_0 - \varphi_0}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2}.$$

Все уравнения для свободных узлов этим выполнены, а решение линейной системы одно, значит, так и есть. Резисторы между свободными клеммами соединяют точки с равными потенциалами, тока нет — убираем (рис. 2).

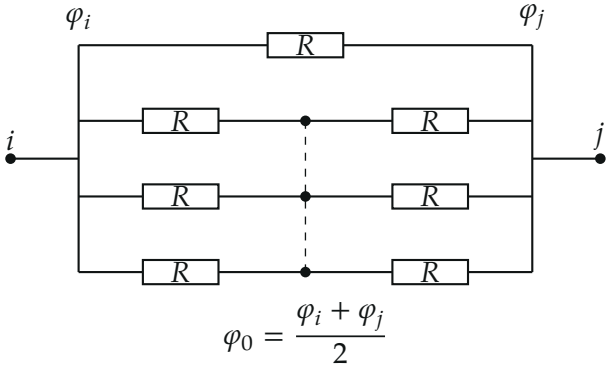


Рис. 2. Многоугольник при $N = 5$, напряжение подано на клеммы i и j: резисторы между тремя свободными клеммами убраны, остаются прямой резистор R и три цепочки $i \to k \to j$ по два резистора R; пунктир — точки с одинаковым потенциалом

2. Многоугольник: сопротивление между i и j. Остались $N-1$ параллельных ветвей: прямой резистор R и $N-2$ цепочек из двух последовательных резисторов, по $2R$ каждая. Проводимости параллельных ветвей складываются:

$$\frac{1}{R_{ij}} = \frac{1}{R} + \frac{N-2}{2R} = \frac{N}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_{ij} = \frac{2R}{N}.$$

3. Звезда: сопротивление между i и j. Ток от клеммы i идёт к центру через резистор r и к клемме j через другой резистор r; остальные лучи кончаются свободными клеммами, тока в них нет (рис. 3). Это два последовательных резистора:

$$R^{\star}_{ij} = 2r.$$

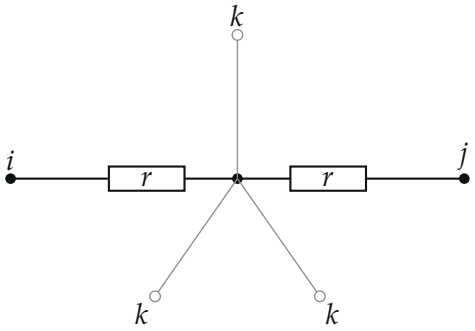


Рис. 3. Звезда при подключении к клеммам i и j: ток идёт только по двум резисторам r через центр, лучи к свободным клеммам k (серые) тока не несут

4. Приравниваем. Эквивалентные схемы дают одно и то же сопротивление между любыми двумя клеммами:

$$\frac{2R}{N} = 2r \quad \Rightarrow \quad R = N\,r.$$

Обратите внимание. Нельзя считать, что между свободными клеммами резисторы «просто мешают»: они убираются только потому, что потенциалы этих клемм равны (проверено в пункте 1). Сопротивление между парой клемм — для обеих схем одно и то же число, поэтому достаточно одной пары: обе схемы симметричны относительно перестановки клемм.

Проверка. Размерность: R и r — сопротивления, N безразмерно. Случай $N = 3$: «треугольник» с сопротивлениями R эквивалентен «звезде» с $r = R/3$, то есть $R = 3r$ — известная формула преобразования «треугольник — звезда». Второй способ (другое подключение): подадим U

на клемму i, остальные $N-1$ клемм соединим вместе и заземлим. В многоугольнике ток равен $I = (N-1)U/R$. В звезде потенциал центра φ_c находим из баланса токов: $\dfrac{U-\varphi_c}{r} = (N-1)\dfrac{\varphi_c}{r}$, $\varphi_c = \dfrac{U}{N}$, и $I = \dfrac{U-\varphi_c}{r} = \dfrac{(N-1)U}{Nr}$. Равенство токов даёт то же $R = Nr$. Смысл: чем больше клемм, тем больше параллельных путей между двумя клеммами в многоугольнике, поэтому его резисторы должны быть в N раз больше, чем лучи звезды.

Ответ. $R = N\,r$.