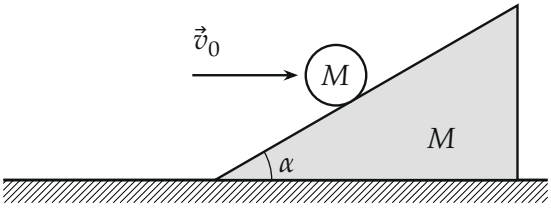
Шарик и клин равной массы

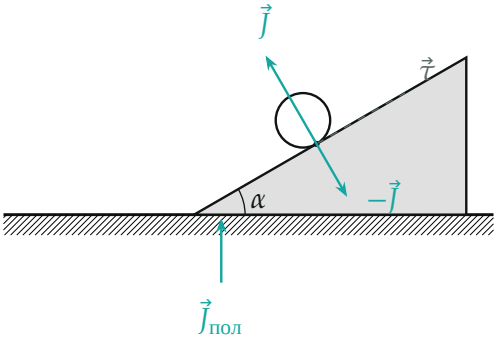
Задача 1. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности находится жёсткий клин массой M, причём его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жёсткий шарик той же массы M, у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. Какой угол β с горизонтом составит скорость шарика сразу после удара?



Поясняющий рисунок. Клин на гладком полу, грань обращена к налетающему шарику; $\vec{v}_0$ — скорость шарика до удара.

▲ **Решение. Что происходит.** Это упругий удар о подвижную гладкую поверхность. Сила, с которой клин действует на шарик во время удара, направлена по нормали к грани (трения нет), поэтому *вдоль грани* импульс шарика не меняется. Пол гладкий, горизонтальных внешних сил нет, поэтому клин отъезжает, а сохраняется горизонтальная проекция импульса системы. Удар упругий, значит сохраняется механическая энергия. Три закона дают три уравнения на три неизвестные: две компоненты скорости шарика и скорость клина. Силой тяжести за время удара пренебрегаем: ударные силы много больше mg.

Обозначения и оси. Ось x — горизонтально вправо (по направлению $\vec{v}_0$), ось y — вверх. Скорость шарика до удара $\vec{v}_0 = (v_0;\, 0)$, после удара $\vec{u} = (u_x;\, u_y)$; клин после удара движется по полу вправо со скоростью V (вертикально клин не движется, пол его держит). Единичный вектор вдоль грани $\vec{\tau} = (\cos\alpha;\, \sin\alpha)$, единичная нормаль к грани (в сторону шарика) $\vec{n} = (-\sin\alpha;\, \cos\alpha)$.



Импульсы за время удара: на шарик $\vec{J} \perp$ грани, на клин $-\vec{J}$ и ударная реакция пола, вертикальная. Угол между нормалью и вертикалью равен α.

1. Закон сохранения проекции импульса шарика на грань клина (за время удара). Сила удара перпендикулярна грани, её проекция на $\vec{\tau}$ равна нулю, значит $\vec{u} \cdot \vec{\tau} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\tau}$:

$$u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha = v_0 \cos\alpha. \qquad (1)$$

Зачем так: уравнение не содержит неизвестной силы удара.

2. Закон сохранения горизонтальной проекции импульса системы «шарик + клин». Горизонтальных внешних сил нет (пол гладкий, его реакция вертикальна), массы равны:

$$Mv_0 = Mu_x + MV. \qquad (2)$$

Обратите внимание: вертикальная проекция импульса системы не сохраняется, пол при ударе даёт вертикальный импульс; поэтому составить второе уравнение для проекции на y нельзя.

3. Закон сохранения механической энергии (удар абсолютно упругий; потенциальная энергия за время удара не меняется):

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{M(u_x^2 + u_y^2)}{2} + \frac{MV^2}{2}. \qquad (3)$$

4. Решаем систему. Из (2): $u_x = v_0 - V$. Подставим в (1): $u_y \sin\alpha =$

$(v_0 - u_x)\cos\alpha = V\cos\alpha$, откуда

$$u_y = V\operatorname{ctg}\alpha.$$

Подставим u_x и u_y в (3):

$$v_0^2 = (v_0 - V)^2 + V^2\operatorname{ctg}^2\alpha + V^2,$$
$$0 = -2v_0V + V^2\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + 1\right),$$
$$V\left(1 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = 2v_0.$$

Решение $V = 0$ отвечает «до удара», нас интересует второе:

$$V = \frac{2v_0\sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha},$$
$$u_x = v_0 - V = \frac{v_0\cos^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha},$$
$$u_y = V\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2v_0\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}.$$

Угол скорости шарика с горизонтом:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha.$$

Оба компонента u_x, u_y положительны: шарик после удара летит вправо и вверх, так что β — острый угол.

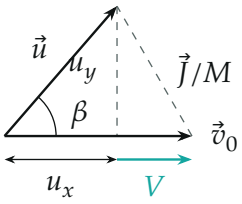


Диаграмма скоростей ($\alpha = 30°$): пунктир — изменение скорости шарика $\vec{J}/M \perp$ грани, V — скорость клина.

Проверка. Второй способ: пусть $\vec{J} = Mj\vec{n}$ — импульс удара. Тогда $\vec{u} = \vec{v}_0 + j\vec{n}$ у шарика и $V = j\sin\alpha$ у клина (горизонтальная проекция силы $-\vec{J}$). Энергия даёт

$$0 = -2v_0 j\sin\alpha + j^2(1+\sin^2\alpha) \;\Rightarrow\; j = \frac{2v_0\sin\alpha}{1+\sin^2\alpha},$$

и снова $V = \dfrac{2v_0\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{j\cos\alpha}{v_0 - j\sin\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha$. Предельные случаи: при $\alpha \to 0$ грань горизонтальна, $\beta \to 0$, клин не движется — верно; при $\alpha \to 90°$ грань вертикальна, это лобовой упругий удар равных масс: $V \to v_0$, шарик останавливается — верно. Отношение скоростей безразмерно, как и должно быть.

Смысл: подвижный клин «смягчает» отражение. От неподвижной грани шарик ушёл бы под углом 2α к горизонту ($\operatorname{tg}2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha/(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$), здесь угол меньше: $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$, потому что часть энергии уходит в движение клина.

Ответ. $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$, то есть $\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$.