Грузик в тормозящем вагоне

Задача 2. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 2] Поезд, подходящий к станции, движется равнозамедленно с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2, вплоть до момента остановки. На абсолютно гладком горизонтальном столе внутри вагона поезда находится грузик, соединённый пружиной с неподвижной опорой (см. рис.). Пока поезд движется, грузик неподвижен относительно вагона. В момент, когда поезд останавливается, грузик приходит в движение и начинает колебаться с периодом $T = 1$ с. Найдите амплитуду колебаний грузика.

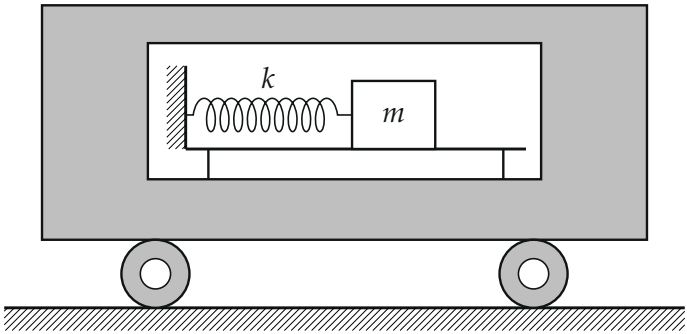
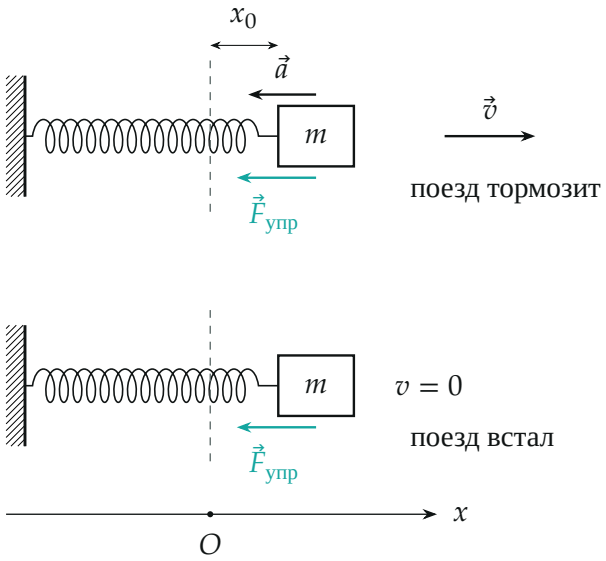


Рисунок условия: грузик на гладком столе внутри вагона, пружина закреплена на стенке вагона.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока поезд тормозит, грузик вместе с вагоном замедляется, значит на него действует сила, направленная против скорости, и создаёт её только пружина: она растянута (или сжата) так, что её сила сообщает грузику ускорение a. В момент остановки ускорение вагона пропадает, а пружина остаётся деформированной. Грузик в этот момент неподвижен: его скорость равна скорости вагона, то есть нулю. Значит начальная деформация пружины — это и есть амплитуда будущих колебаний. Класс задачи: колебания с заданным начальным смещением и нулевой начальной скоростью.

Обозначения и оси. m — масса грузика, k — жёсткость пружины, $\vec{v}$ — скорость поезда, направленная вправо (при другом направлении движения ниже всё то же, пружина лишь окажется сжатой, а не растянутой).

Ось x — вдоль пружины вправо, начало O — положение грузика при нерастянутой пружине (оно же положение равновесия после остановки: стол гладкий, других горизонтальных сил на грузик нет). Решаем в системе отсчёта, связанной с землёй (она инерциальна).



Сверху — пока поезд тормозит: пружина растянута на x_0, её сила направлена влево, как и ускорение. Снизу — сразу после остановки: сила та же, а грузик покоится.

1. Второй закон Ньютона для грузика, пока поезд тормозит. В проекции на ось x вдоль пружины (по горизонтали работает только сила упругости; сила тяжести и реакция стола вертикальны и уравновешены, трения нет). Скорость поезда направлена вправо и убывает, поэтому ускорение $\vec{a}$ направлено влево, его проекция $-a$. Растянутая на x_0 пружина тянет грузик влево с силой kx_0:

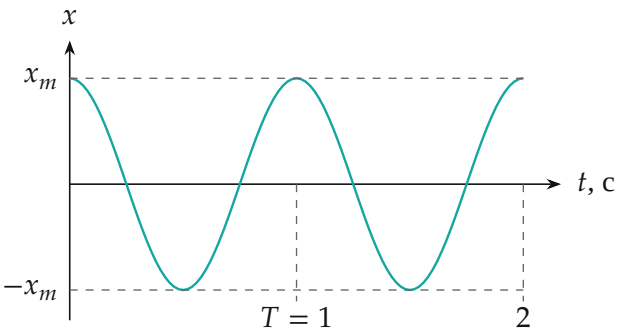
$$m \cdot (-a) = -kx_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{ma}{k}.$$

Здесь x_0 — деформация пружины в процессе торможения; она постоянна, потому что грузик покоится относительно вагона, а a постоянно.

2. Начальные условия колебаний. В момент остановки поезд перестаёт ускоряться, а пружина не успевает измениться: грузик остаётся в точке $x = x_0$, его скорость равна скорости вагона, то есть нулю. Дальше на грузик действует только сила пружины $-kx$ (уравнение $m\ddot{x} = -kx$), и это гармонические колебания около O:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}.$$

Начальное смещение при нулевой скорости равно амплитуде: $x_m = x_0$.



Движение грузика после остановки (ось времени — от момента остановки). Максимальное смещение равно $x_0 = x_m$, период T.

3. Исключаем неизвестные m и k. Период пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, откуда $\dfrac{m}{k} = \dfrac{T^2}{4\pi^2}$. Подставим в x_0:

$$x_m = x_0 = a\,\frac{m}{k} = \frac{aT^2}{4\pi^2} = \frac{0{,}2\ \text{м/с}^2 \cdot (1\ \text{с})^2}{4 \cdot 9{,}87} \approx 5{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \approx 5\ \text{мм}.$$

Обратите внимание: ни масса грузика, ни жёсткость пружины, ни скорость поезда не нужны. Масса и жёсткость входят только отношением m/k, и его целиком задаёт период.

Проверка. Размерность: $\text{м/с}^2 \cdot \text{с}^2 = \text{м}$. Знак и предел: при $a \to 0$ пружина недеформирована, колебаний нет, $x_m \to 0$; чем «мягче» пружина (больше T), тем сильнее она растянута при торможении и тем больше

амплитуда — как и должно быть. Второй способ: в системе вагона во время торможения действует сила инерции ma вдоль скорости; она растягивает пружину, а при остановке пропадает — грузик отпущен из положения x_0 без скорости, то же $x_0 = ma/k$. Смысл: амплитуда — это просто «растяжение пружины, которое держало грузик при торможении»: около пяти миллиметров.

Ответ. $x_m = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} \approx 5$ мм.