Цикл в координатах ρ–T

Задача 3. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 3] С одним молем одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1-2-3-4-1, как показано на рисунке в координатах ρ–T (плотность — температура). Участок 2-3 — гипербола. Температуры в точках 1, 2 и 3 равны, соответственно, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 500$ К, $T_3 = 800$ К. На участке 4-1 газ отдаёт холодильнику количество теплоты $Q_{41} \approx 1172$ Дж. Найти КПД цикла.

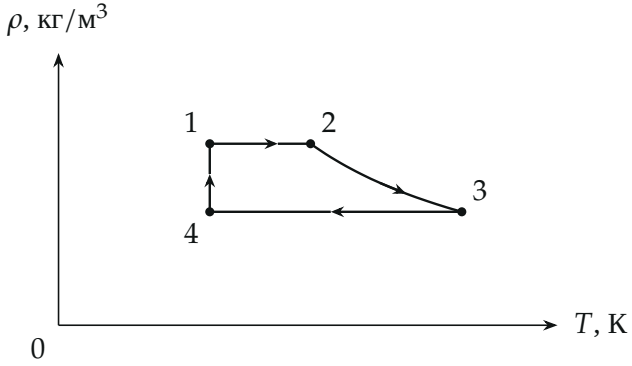


Рисунок условия: цикл на плоскости ρ–T (схема, масштаб не выдержан).

▲ **Решение. Что происходит.** Плотность газа $\rho = m/V$ определяет объём: $V \propto 1/\rho$. Поэтому постоянство ρ означает постоянный объём, а гипербола $\rho T = \text{const}$ — постоянное давление: из уравнения состояния $p = \rho RT/\mu$, значит $p \propto \rho T$. Вертикальный участок — постоянная температура. Задача сводится к циклу «изохора — изобара — изохора — изотерма» одноатомного газа; КПД — работа за цикл, делённая на теплоту, полученную от нагревателя.

Обозначения. $\nu = 1$ моль, $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$ — молярные теплоёмкости одноатомного газа; A — работа газа за цикл, Q_+ — теплота, полученная за цикл, Q_- — теплота, отданная холодильнику.

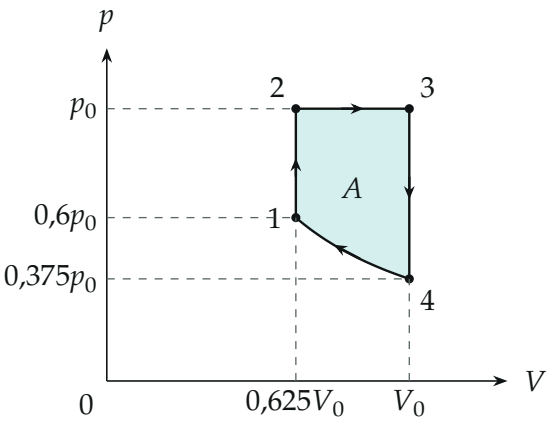
1. Что за процесс на каждом участке.

- $1 \to 2$: $\rho = \text{const}$, $V = \text{const}$, T растёт от T_1 до T_2 — изохорное нагревание, газ получает теплоту.

- $2 \to 3$: $\rho T = \text{const}$, $p = \text{const}$, T растёт до T_3, плотность падает, объём растёт — изобарное расширение. Газ получает теплоту.
- $3 \to 4$: $\rho = \text{const}$, $V = \text{const}$, температура падает — изохорное охлаждение, газ отдаёт теплоту. Точка 4 лежит на вертикали под точкой 1, поэтому $T_4 = T_1$.
- $4 \to 1$: $T = \text{const}$, ρ растёт, объём падает — изотермическое сжатие, газ отдаёт теплоту Q_{41}.

Обратите внимание: гипербола на плоскости ρ–T — это *изобара*, а изотерма — вертикальный отрезок; на привычных осях всё наоборот.

2. Объёмы и давления в единицах состояния 3. Пусть $\rho_3 = \rho_0$, $V_3 = V_0$, $p_3 = p_0$. Тогда $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 T_3/T_2 = 1{,}6\rho_0$ (по гиперболе $\rho_2 T_2 = \rho_3 T_3$), $V_1 = V_2 = V_0/1{,}6 = 0{,}625\,V_0$, $V_4 = V_3 = V_0$. Давления $p \propto \rho T$: $p_2 = p_3 = p_0$, $p_1 = p_0 \cdot \frac{1{,}6 \cdot 300}{800} = 0{,}6\,p_0$, $p_4 = p_0 \cdot \frac{300}{800} = 0{,}375\,p_0$.



Тот же цикл на плоскости p–V: изохоры $1 \to 2$ и $3 \to 4$, изобара $2 \to 3$, изотерма $4 \to 1$. Площадь внутри — работа за цикл A.

3. Теплота, полученная газом. Первый закон термодинамики на изохоре и изобаре для одного моля:

$$Q_{12} = C_V(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) \approx 2493 \text{ Дж},$$

$$Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}R(T_3 - T_2) \approx 6233 \text{ Дж}.$$

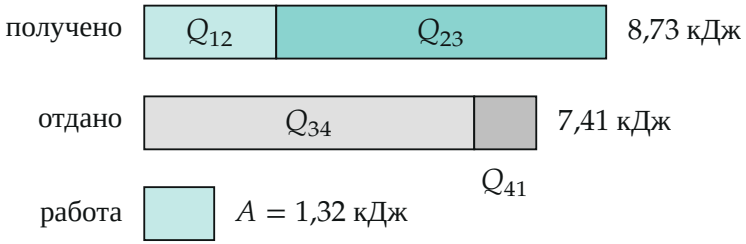
(на изобаре газ ещё и совершает работу, поэтому здесь C_p, а не C_V.) Всего $Q_+ = Q_{12} + Q_{23} \approx 8726$ Дж. На $3 \to 4$ и $4 \to 1$ газ теплоту отдаёт, на них он ничего не получает.

4. Работа за цикл. Работа газа есть площадь внутри цикла на p–V. На изохорах работа нулевая. На изобаре $2 \to 3$ газ совершает $A_{23} = p_0(V_0 - V_2) = R(T_3 - T_2) \approx 2493$ Дж. На изотерме $4 \to 1$ внутренняя энергия не меняется, поэтому работа газа равна полученной теплоте: $A_{41} = -Q_{41} = -1172$ Дж (газ сжимают, работа отрицательна). Итого

$$A = R(T_3 - T_2) - Q_{41} \approx 2493 - 1172 = 1321 \text{ Дж}.$$

5. КПД.

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{R(T_3 - T_2) - Q_{41}}{\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}R(T_3 - T_2)} \approx \frac{1321}{8726} \approx 0{,}15.$$



Тепловой баланс за цикл (1 моль): $A = Q_+ - |Q_-|$. Длины отрезков пропорциональны теплотам.

Проверка. Второй способ: по первому закону термодинамики для цикла $A = Q_+ - |Q_-|$, где $Q_{34} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) \approx 6233$ Дж (охлаждение от 800 до 300 К) и $Q_{41} = 1172$ Дж; получаем $A = 8726 - 6233 - 1172 = 1321$ Дж — то же число, что по площади. Заданное Q_{41} согласуется с расчётом: $Q_{41} = RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1} = RT_1 \ln \frac{T_3}{T_2} = 8{,}31 \cdot 300 \cdot 0{,}470 \approx 1172$ Дж. Подставив его, получаем формулу, зависящую только от температур:

$$\eta = \frac{2\left(T_3 - T_2 - T_1 \ln \dfrac{T_3}{T_2}\right)}{5T_3 - 2T_2 - 3T_1} = \frac{2 \cdot 159}{2100} \approx 0{,}15.$$

Размерность: отношение энергий, безразмерно; $\eta < 1 - T_{\min}/T_{\max} = 0{,}625$ (предел Карно между T_1 и T_3) — верно. Смысл: больше двух третей полученного тепла газ отдаёт холодильнику при изохорном охлаждении $3 \to 4$, в работу превращается лишь около 15 %.

Ответ. $\eta \approx 0{,}15$, точнее $\eta = \dfrac{R(T_3 - T_2) - Q_{41}}{\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}R(T_3 - T_2)}$, или $\eta = \dfrac{2\left(T_3 - T_2 - T_1 \ln \frac{T_3}{T_2}\right)}{5T_3 - 2T_2 - 3T_1}$.