Диод в цепи переменного тока

Задача 4. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 4] Участок AB электрической цепи состоит из резисторов с сопротивлениями $R_1 = R_0$, $R_2 = 9R_0$, $R_3 = 9R_0$, $R_4 = R_0$, где $R_0 = 1$ кОм, и идеального диода CD (см. рис.). Идеальный диод пропускает ток без сопротивления в направлении от C к D и не пропускает совсем в обратном направлении. Участок AB подключают к источнику переменного синусоидального напряжения $U_{AB}(t) = U_m \sin \omega t$, амплитуда которого равна $U_m = 300$ В. Какая тепловая мощность будет выделяться на этом участке?

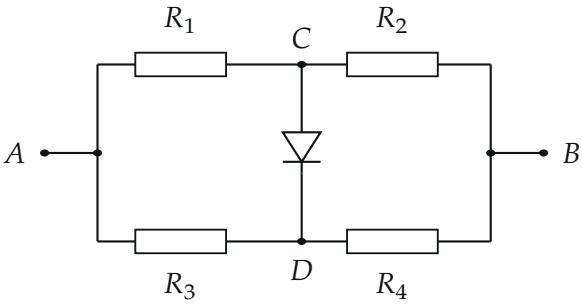


Рисунок условия. Диод пропускает ток от C к D (вниз).

▲ **Решение. Что происходит.** Диод работает как переключатель: при одной полярности напряжения U_{AB} он превращается в провод, при другой — в разрыв. Значит, в одном полупериоде у участка одно сопротивление R_+, в другом — другое, R_-, а мощность $P(t) = U_{AB}^2/R$ нужно усреднить по периоду. Класс задачи: диод — перебор состояний «открыт / закрыт» с проверкой предположения.

Обозначения. $U = U_{AB}(t)$; потенциал B принимаем за нуль, $\varphi_A = U$. Диод открыт, если $\varphi_C > \varphi_D$ (ток от C к D), и закрыт, если $\varphi_C < \varphi_D$.

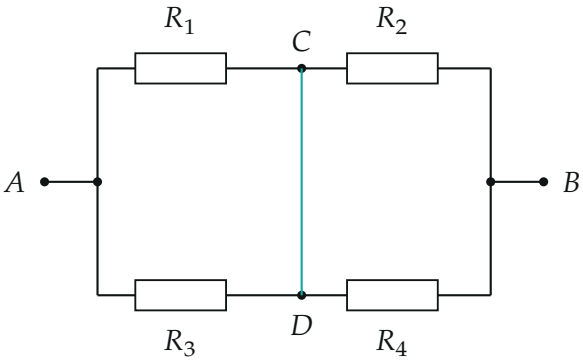
1. В какую полярность диод открыт. Предположим, что диод удалён (закрыт), тогда цепь — две ветви $A-C-B$ и $A-D-B$, каждая из двух резисторов. Потенциал точки между резисторами в ветви находим по делителю напряжения:

$$\varphi_C = U\,\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0{,}9\,U, \qquad \varphi_D = U\,\frac{R_4}{R_3+R_4} = 0{,}1\,U.$$

Разность $\varphi_C - \varphi_D = 0{,}8\,U$. При $U > 0$ получается $\varphi_C > \varphi_D$: на диоде прямое напряжение, он не может быть закрыт — предположение неверно, диод открыт. При $U < 0$ разность отрицательна, диод заперт, предположение верно.

2. Первый полупериод, $U > 0$: диод открыт. Идеальный диод — провод, точки C и D соединены в один узел. Тогда R_1 и R_3 включены параллельно (от A до узла), R_2 и R_4 — тоже параллельно (от узла до B), и эти пары — последовательно:

$$R_+ = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{9R_0}{10} + \frac{9R_0}{10} = 1{,}8R_0.$$



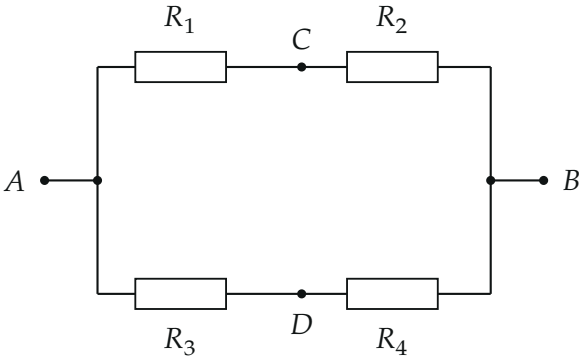
$U > 0$, диод открыт: C и D — один узел (бирюзовый провод). Параллельные пары $R_1 \parallel R_3$ и $R_2 \parallel R_4$ соединены последовательно.

Проверим, что ток через диод действительно идёт от C к D. Потенциал узла по симметрии пар равен $U/2$ (сопротивления в парах одинаковы: $R_1 \parallel R_3 = R_2 \parallel R_4$). Ток через R_1 равен $\dfrac{U/2}{R_0}$, через R_2 — $\dfrac{U/2}{9R_0}$; в узел C входит $\dfrac{U}{2R_0}$, из него уходит по R_2 только $\dfrac{U}{18R_0}$, остальное $\dfrac{4U}{9R_0} > 0$ идёт через диод вниз — согласовано с тем, что диод открыт.

3. Второй полупериод, $U < 0$: диод закрыт. Ток идёт только по двум одинаковым ветвям $A-C-B$ и $A-D-B$, каждая из $R_1 + R_2 = 10R_0$ и

$R_3 + R_4 = 10R_0$, соединённых параллельно:

$$R_- = \frac{10R_0 \cdot 10R_0}{10R_0 + 10R_0} = 5R_0.$$



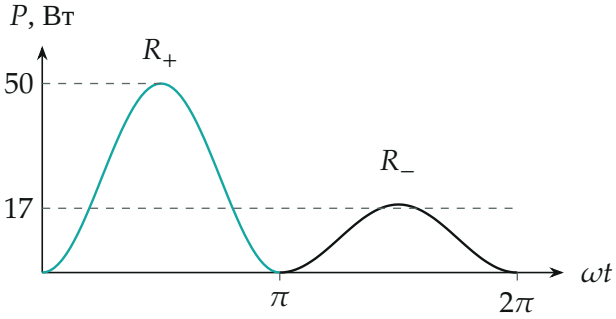
$U < 0$, диод закрыт: перемычки CD нет, остались две параллельные ветви по $10R_0$.

4. Средняя мощность. Мгновенная мощность $P(t) = U^2/R = U_m^2 \sin^2 \omega t/R$, где $R = R_+$ в тех половинах периода, где $\sin \omega t > 0$, и $R = R_-$ в остальных. Среднее значение $\sin^2 \omega t$ за любую половину периода равно $\frac{1}{2}$, поэтому

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_m^2}{2R_+} + \frac{1}{2} \cdot \frac{U_m^2}{2R_-} = \frac{U_m^2}{4R_0} \left(\frac{1}{1{,}8} + \frac{1}{5} \right) = \frac{U_m^2}{4R_0} \cdot \frac{34}{45} = \frac{17\,U_m^2}{90\,R_0}.$$

Числа: $\dfrac{U_m^2}{R_0} = \dfrac{(300\text{ В})^2}{1000\text{ Ом}} = 90$ Вт, значит $\langle P \rangle = 17$ Вт.

Обратите внимание: усреднять нужно мощность, а не сопротивление: $R = \frac{1}{2}(R_+ + R_-)$ дало бы другой, неверный результат.



Мощность за период: в первой половине ($R_+ = 1{,}8R_0$) пик 50 Вт, во второй ($R_- = 5R_0$) — 18 Вт; пунктир — среднее 17 Вт.

Проверка. Размерность: $\text{В}^2/\text{Ом} = \text{Вт}$. Предельные случаи: если бы диод был всегда закорочен, мощность равнялась бы $\dfrac{U_m^2}{2R_+} = 25$ Вт, если бы диода не было совсем, $\dfrac{U_m^2}{2R_-} = 9$ Вт; поскольку диод по половине периода работает как провод, а по половине как разрыв, ответ — среднее этих двух: $\frac{1}{2}(25 + 9) = 17$ Вт — сошлось. Смысл: диод заметно «выпрямляет» нагрузку: в открытом полупериоде мощность в пике почти втрое больше, чем в закрытом.

Ответ. $\langle P\rangle = \dfrac{17\,U_m^2}{90\,R_0} = 17$ Вт.