Заряженная бусинка на наклонном стержне

Задача 5. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 5] Бусинка, нанизанная на неподвижный стержень, образующий угол α с горизонтом (см. рис.), имеет массу m и заряд q. Бусинка может скользить вдоль стержня с коэффициентом трения μ и начинает движение из состояния покоя, причём $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, линии которого горизонтальны (перпендикулярны плоскости рисунка и направлены внутрь рисунка). Какую максимальную скорость и какое максимальное ускорение будет иметь бусинка при движении? Стержень не проводит ток. Рассмотреть два случая: $q > 0$ и $q < 0$.

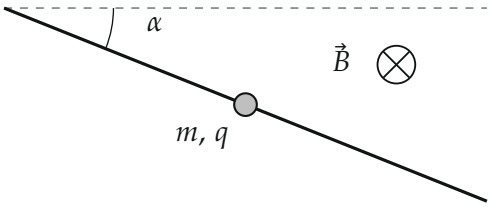


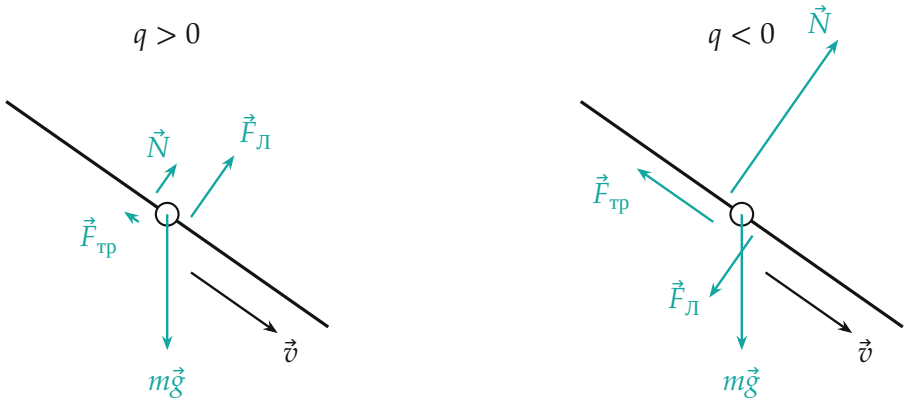
Рисунок условия: стержень под углом α к горизонту, поле $\vec{B}$ направлено от нас.

▲ **Решение. Что происходит.** Бусинка соскальзывает по стержню и разгоняется. Сила Лоренца $q\vec{v} \times \vec{B}$ перпендикулярна скорости, то есть перпендикулярна стержню: работы она не совершает, но меняет прижим бусинки к стержню, а вместе с ним — нормальную реакцию и силу трения. Рост скорости при $q > 0$ сначала разгружает стержень (трение падает, ускорение растёт), потом сила Лоренца начинает прижимать бусинку с другой стороны; при $q < 0$ она прижимает с самого начала. В обоих случаях трение растёт со скоростью и в конце концов уравновешивает $mg\sin\alpha$: ускорение падает до нуля, скорость выходит на максимум. Класс задачи: движение с трением, зависящим от скорости (установившееся движение).

Обозначения и оси. Ось s — вдоль стержня вниз по ходу бусинки, ось n — перпендикулярно стержню вверх. Скорость $\vec{v}$ направлена вдоль s (по условию $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, бусинка соскальзывает, как только её отпустили).

N — проекция реакции стержня на ось n (знак любой: стержень может подпирать бусинку снизу или удерживать сверху), $F_{\text{тр}} = \mu|N|$ — модуль силы трения, она направлена против скорости.

1. Направление силы Лоренца. Скорость направлена вправо-вниз вдоль стержня, поле — от нас. Для положительного заряда $q\vec{v} \times \vec{B}$ направлена вверх по нормали, то есть вдоль $+n$ (скорость вправо, поле от нас — сила вверх). Для отрицательного — вдоль $-n$. В проекции на ось n единым выражением: $F_{\text{Л},n} = qvB$ (с учётом знака q), по модулю $|q|vB$.



Силы на бусинку при $q > 0$ (слева) и $q < 0$ (справа). Длины стрелок примерно соответствуют модулям. При $q > 0$ в показанный момент $N = mg\cos\alpha - qvB > 0$, при $q < 0$ реакция $N = mg\cos\alpha + |q|vB$ больше.

2. Второй закон Ньютона в проекциях. На ось n (ускорения вдоль нормали нет, бусинка скользит по стержню):

$$N + qvB - mg\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\alpha - qvB.$$

На ось s:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu|N| = mg\sin\alpha - \mu\,|mg\cos\alpha - qvB|.$$

Случай $q > 0$. Пока $v < v_1 = \dfrac{mg\cos\alpha}{qB}$, имеем $N > 0$ (стержень

подпирает снизу):

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \frac{\mu qB}{m}\,v,$$

ускорение растёт с ростом v от $a_0 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > 0$ (здесь используем $\mu < \operatorname{tg}\alpha$). При $v = v_1$ реакция и трение обращаются в нуль, и $a = g\sin\alpha$. Это наибольшее значение: после v_1 реакция меняет знак ($N < 0$: стержень удерживает бусинку от отрыва «вверх»), трение $\mu(qvB - mg\cos\alpha)$ растёт, и

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - \frac{\mu qB}{m}\,v$$

убывает. Скорость растёт, пока $a > 0$; установившаяся скорость — при $a = 0$:

$$v_{\max} = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\mu qB}, \qquad a_{\max} = g\sin\alpha.$$

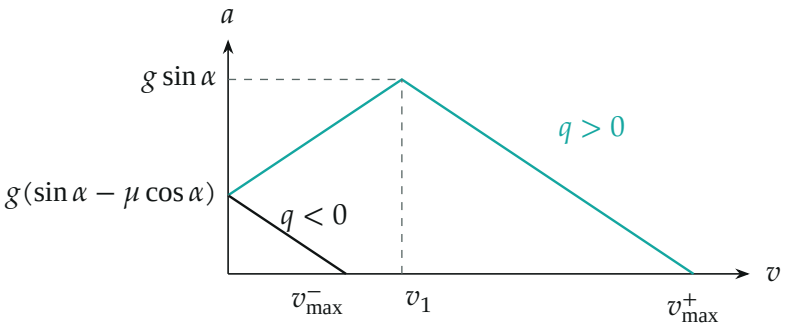
Обратите внимание: максимум ускорения достигается не в начале, а в момент, когда реакция стержня равна нулю.

Случай $q < 0$**.** Сила Лоренца прижимает бусинку к стержню: $N = mg\cos\alpha + |q|vB > 0$ при любой скорости, и

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{\mu|q|B}{m}\,v$$

монотонно убывает от значения при $v = 0$. Поэтому наибольшее ускорение — в начале, а нулевое ускорение даёт

$$a_{\max} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad v_{\max} = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu|q|B}.$$



Зависимость ускорения от скорости (для $\alpha = 40°$, $\mu = 0{,}5$). Бирюзовая — $q > 0$: рост до $g\sin\alpha$ при $v_1 = mg\cos\alpha/(qB)$, затем спад до нуля при $v^+_{\max}$. Чёрная — $q < 0$: спад от a_0 до нуля при $v^-_{\max}$.

Проверка. Размерность: $mg/(qB)$ — это Н/(Кл · Тл) = м/с, как и должно быть для скорости. Знак: при $q > 0$ $v_{\max}$ больше, чем при $q < 0$ ($\sin\alpha + \mu\cos\alpha > \sin\alpha - \mu\cos\alpha$), так как сила Лоренца там не прижимает, а помогает: стержень ещё долго не создаёт трения. Пределы: при $B \to 0$ (магнитного поля нет) или $\mu \to 0$ (трения нет) $v_{\max} \to \infty$: ничто не успевает уравновесить $mg\sin\alpha$, бусинка разгоняется всё время. При $q > 0$ скорость $v_{\max} > v_1$ всегда, так как $\sin\alpha + \mu\cos\alpha > \mu\cos\alpha$. Максимальная скорость достигается асимптотически: чем ближе к $v_{\max}$, тем меньше ускорение.

Смысл: магнитное поле работы не совершает, но, управляя прижимом, управляет трением; именно оно ограничивает скорость.

Ответ. При $q > 0$: $v_{\max} = \dfrac{mg}{\mu qB}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, $a_{\max} = g\sin\alpha$. При $q < 0$: $v_{\max} = \dfrac{mg}{\mu|q|B}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, $a_{\max} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.