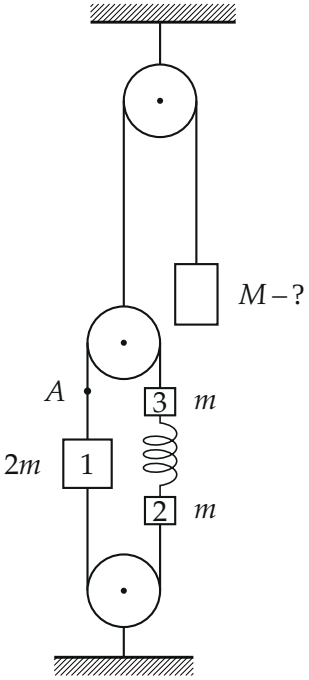
Блоки, нити и пружина (11 класс)

Задача 6. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 6] В системе, изображённой на рисунке, все блоки — невесомые и вращаются без трения, все нити — невесомые и нерастяжимые (их жёсткость велика по сравнению с жёсткостью пружины). Пружина также невесома. Система находится в покое. При какой массе груза M груз 1 сразу после пережигания нити в точке A будет иметь ускорение, большее по модулю, чем g?



▲ **Решение. Что происходит.** До пережигания всё в покое, и вес груза M определяет натяжения всех нитей и растяжение пружины. После пережигания у груза 1 пропадает нить сверху, он начинает падать, а нить, идущая от него вниз через нижний блок, тянет вверх груз 2. Деформация пружины за мгновение не меняется, поэтому её сила в первый момент известна: её находим из равновесия до пережигания. Дальше — второй закон Ньютона для грузов 1 и 2 со связью ускорений через нерастяжимую нить. Если ускорение груза 1 больше g, значит, нить между грузами

1 и 2 тянет груз 1 вниз, то есть натянута; если бы она провисла, груз 1 падал бы свободно с ускорением ровно g.

Обозначения и оси. T — натяжение нити, огибающей средний блок (у невесомого блока без трения натяжения по обе стороны одинаковы), T' — натяжение нити, огибающей нижний блок, F — сила упругости пружины (пружина растянута и тянет груз 3 вниз, а груз 2 — вверх). Тут и далее ось направлена по движению: у груза 1 — вниз, у груза 2 — вверх (так связаны их скорости).

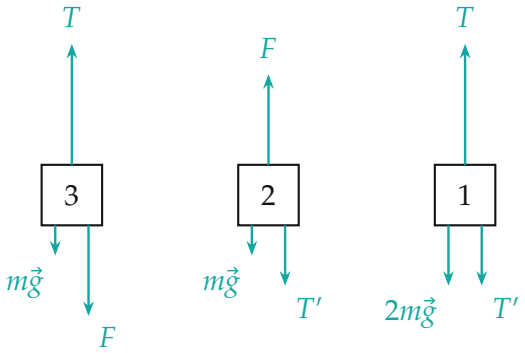
1. До пережигания. Груз M в покое: нить к нему натянута силой Mg; через верхний неподвижный блок эта сила передаётся нити, держащей ось среднего блока. Средний блок невесом, поэтому сумма сил на него равна нулю: вверх тянет Mg, вниз — две ветви нити по T:

$$2T = Mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Mg}{2}.$$

Груз 3 в покое: нить тянет вверх, тяжесть и пружина — вниз:

$$T = mg + F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Mg}{2} - mg.$$

Для полноты: груз 1 даёт $T = 2mg + T'$, груз 2 — $F = mg + T'$, оба уравнения приводят к $T' = \dfrac{Mg}{2} - 2mg$, и это согласуется с найденным F.



Силы на грузы до пережигания (для примера взято $M = 8m$: $T = 4mg$,

$F = 3mg$, $T' = 2mg$; длины стрелок пропорциональны модулям).

2. Что происходит сразу после пережигания. Сила пружины остаётся равной $F = \dfrac{Mg}{2} - mg$. Нить над грузом 1 порвана, натяжения сверху нет. Остаётся замкнутая цепочка «груз 1 — нить — нижний блок — нить — груз 2». Нижний блок неподвижен, нить нерастяжима, поэтому груз 1 едет вниз ровно с той же скоростью, с какой груз 2 едет вверх, и так же связаны ускорения: $a_1 = a_2 = a$.

3. Второй закон Ньютона. Груз 1 (положительное направление — вниз; на него действуют тяжесть $2mg$ вниз и натяжение нити T' вниз):

$$2m\,a = 2mg + T'.$$

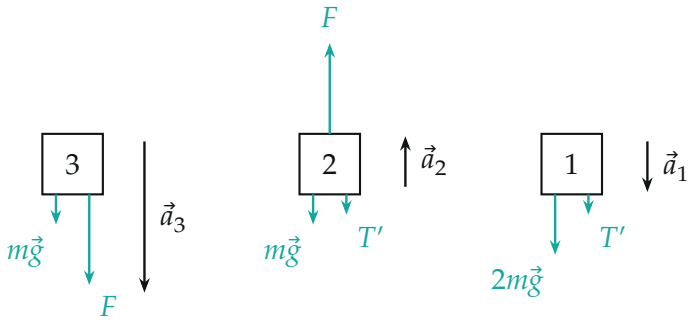
Груз 2 (положительное направление — вверх; вверх тянет пружина, вниз — тяжесть и нить):

$$m\,a = F - mg - T'.$$

Складываем, чтобы исключить T':

$$3m\,a = F + mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F + mg}{3m}.$$

Заодно $T' = 2m(a - g)$.



Силы на грузы сразу после пережигания ($M = 8m$: $F = 3mg$, $a_1 = a_2 = \frac{4}{3}g$, $T' = \frac{2}{3}mg$). Груз 3 нить больше не держит: он падает с ускорением $a_3 = (F + mg)/m$.

4. Условие $a > g$**.** Подставим a:

$$\frac{F + mg}{3m} > g \;\Rightarrow\; F > 2mg \;\Rightarrow\; \frac{Mg}{2} - mg > 2mg \;\Rightarrow\; M > 6m.$$

Это условие равносильно $T' = 2m(a - g) > 0$: нить между грузами 1 и 2 натянута. При $M \le 6m$ расчёт дал бы $T' \le 0$; нить не может толкать, значит, она провисает, и груз 1 падает свободно с ускорением g, не большим g.

Обратите внимание: груз 1 нельзя считать «просто падающим» — при большой M нить через нижний блок добавляет ему ускорение вниз, потому что пружина растянута сильно и тянет груз 2 вверх. Ускорение груза 3 для ответа не нужно: нить его не держит.

Проверка. Второй способ: возьмём грузы 1 и 2 с нитью как одну систему, движущуюся «по нити». Движущая сила вдоль нити: $2mg$ (тяжесть груза 1) $+(F - mg)$ (пружина минус тяжесть груза 2) $= F + mg$, масса $3m$ — получаем то же $a = (F + mg)/(3m)$. Граница: при $M = 6m$ имеем $F = 2mg$, $a = g$, $T' = 0$ — нить на грани провисания, как и должно быть. Единственное условие: на равновесие нужно $T' \ge 0$, то есть $M \ge 4m$; при $M > 6m$ оно выполнено. Смысл: чтобы груз 1 «обогнал» свободное падение, пружина должна тянуть груз 2 вверх с силой, большей $2mg$, а её растяжение задаёт вес груза M: $F = (M/2 - m)g$, отсюда $M > 6m$.

Ответ. $M > 6m$.