Тепловая машина на воде и паре

Задача 7. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 7] Рабочим телом тепловой машины служит некоторое количество воды. Цикл, по которому работает машина, показан на рисунке в p–T координатах (пунктиром изображена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры). Он состоит из изобарического (1–2–3), изохорического (3–4) и изотермического (4–1) участков. Найдите КПД этого цикла, считая воду практически несжимаемой жидкостью.

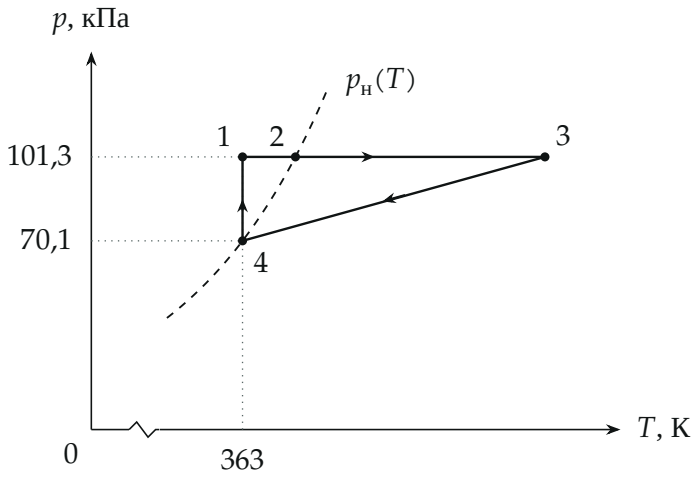


Рисунок условия (схема): цикл в координатах p–T, пунктир — давление насыщенных паров $p_н(T)$.

Напоминания: $p_1 = 101{,}3$ кПа — нормальное атмосферное давление, удельная теплота парообразования воды (при 100 °C) $L \approx 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, удельная теплоёмкость воды $c \approx 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К), теплоёмкость одного моля водяного пара при постоянном давлении равна $4R$.

▲ **Решение. Что происходит.** Над пунктирной кривой лежит область жидкости, под ней — пара; сам пунктир — равновесие воды и насыщенного пара. Точка 1 — вода (она выше кривой), точки 2 и 4 лежат на кривой, 3 — перегретый пар. Вода на изобаре нагревается до кипения

(1→2), потом при постоянных p и T вся выкипает (это всё происходит в точке 2 диаграммы!), пар нагревается как идеальный газ до T_3, охлаждается по изохоре до насыщения (3→4), при T_4 целиком конденсируется (в точке 4) и остывшая жидкость сжимается до p_1 (4→1). Почти всё тепло от нагревателя идёт на парообразование, а полезная работа — площадь цикла на p–V. Класс задачи: цикл с фазовым переходом — состояния и теплоты участок за участком.

Обозначения. ν — число молей воды, $m = \mu\nu$ — масса; $T_1 = T_4 = 363$ К, $T_2 = 373$ К (при p_1 вода кипит при 100 °C), $p_4 = 70{,}1$ кПа, $p_1 = 101{,}3$ кПа. $V_{ж}$ — объём жидкой воды: он в сотни раз меньше объёма пара (для 1 моля 18 см^3 против десятков литров), поэтому им при подсчёте работы пренебрегаем.

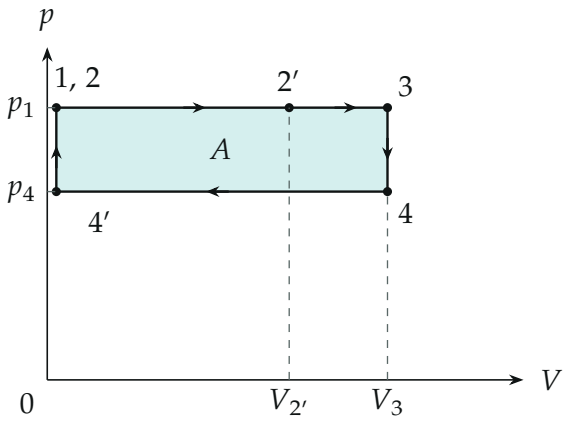
1. Что происходит на каждом участке.

- $1 \to 2$: изобарное нагревание воды от T_1 до $T_2 = 373$ К, объём практически не меняется. Вода получает теплоту Q_{12}.
- $2 \to 2'$: кипение при постоянных p_1 и T_2: вся вода превращается в насыщенный пар. На p–T диаграмме это одна точка 2; объём растёт от $V_{ж}$ до $\nu R T_2/p_1$; теплота $Q_{22'}$.
- $2' \to 3$: изобарное нагревание пара (идеальный газ) от T_2 до T_3, теплота $Q_{2'3}$.
- $3 \to 4$: изохорное охлаждение пара, $V_3 = \text{const}$, до давления p_4 и температуры $T_4 = 363$ К, где он становится насыщенным. Для идеального газа при $V = \text{const}$ имеем $p/T = \text{const}$, откуда

$$T_3 = T_4 \frac{p_1}{p_4} = 363 \cdot \frac{101{,}3}{70{,}1} \approx 525 \text{ К}.$$

- $4 \to 1$: при $T = 363$ К давление растёт от p_4 до p_1. Выше кривой $p_{н}$ при этой температуре может быть только жидкость, значит, сначала весь пар конденсируется при T_4, p_4 (в точке 4; состояние $4'$ — вода при p_4), а затем жидкость сжимается до p_1 практически при постоянном объёме.

Теплоту рабочее тело получает на участках $1 \to 2$, $2 \to 2'$, $2' \to 3$ и отдаёт на остальных.



Тот же цикл на плоскости p–V (жидкость занимает пренебрежимо малый объём, поэтому точки 1, 2 и 4′ у оси p). Кипение $2 \to 2'$ и нагревание пара $2' \to 3$ — участок при p_1; конденсация $4 \to 4'$ — при p_4. Закрашен прямоугольник площади A.

2. Теплота, полученная от нагревателя (на ν молей, $m = \mu\nu$):

$$Q_{12} = c\,m\,(T_2 - T_1) = c\mu\nu \cdot 10\text{ K} \approx 0{,}75\,\nu\text{ кДж},$$
$$Q_{22'} = Lm = L\mu\nu \approx 40{,}7\,\nu\text{ кДж},$$
$$Q_{2'3} = 4R\nu(T_3 - T_2) = 4 \cdot 8{,}31 \cdot 152\,\nu\text{ Дж} \approx 5{,}04\,\nu\text{ кДж},$$

(числа — на один моль, $\mu = 0{,}018$ кг/моль). Итого

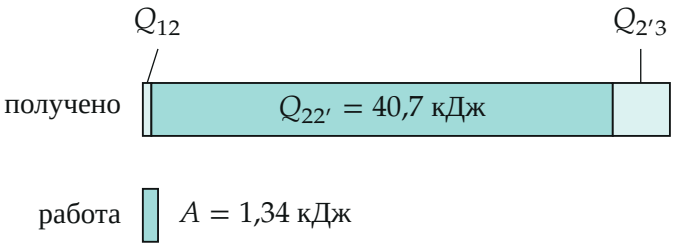
$$Q_+ = Q_{12} + Q_{22'} + Q_{2'3} \approx 46{,}5\,\nu\text{ кДж}.$$

3. Работа за цикл — по площади на p–V. Объём пара в состоянии 3 найдём по уравнению состояния: $p_1 V_3 = \nu R T_3$. Работа газа: на изобаре с p_1 от $V_ж \approx 0$ до V_3 — $p_1 V_3$; на изохоре $3 \to 4$ — нуль; на участке $4 \to 4'$ (конденсация при p_4, объём уменьшается на V_3) — $-p_4 V_3$; сжатие жидкости $4' \to 1$ — нуль (вода несжимаема). Площадь внутри цикла — прямоугольник:

$$A = (p_1 - p_4)V_3 = \nu R T_3 \left(1 - \frac{p_4}{p_1}\right) =$$
$$= \nu \cdot 8{,}31 \cdot 525 \cdot 0{,}308\text{ Дж} \approx 1{,}34\,\nu\text{ кДж}.$$

4. КПД.

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{1{,}34}{46{,}5} \approx 0{,}029 = 2{,}9\ \%.$$



Тепловой баланс 1 моля воды за цикл: нагревателю приходится отдать 46,5 кДж, в работу превращается 1,34 кДж, почти всё остальное тратится на парообразование.

Обратите внимание: на p–T диаграмме кипение $2 \to 2'$ и конденсация $4 \to 4'$ не видны — каждое происходит в одной точке. Именно поэтому в цикле участок «1–2–3» — не простое нагревание газа, а три разных этапа, и теплота парообразования здесь главная. Также $4 \to 1$ — не изотермическое сжатие пара, а конденсация и затем сжатие жидкости.

Проверка. Размерность: Дж/Дж. Предел: КПД цикла не может превышать карновский $1 - T_{\min}/T_{\max} = 1 - 363/525 \approx 0{,}31$; полученные 2,9 % много меньше, и это естественно, поскольку основную часть тепла забирает парообразование, а работа — лишь малая разность $(p_1 - p_4)V_3$. Грубая оценка: $A/Q_{22'} = 1{,}34/40{,}7 \approx 0{,}033$ — того же порядка. Пренебрежение объёмом жидкости оправдано: $V_{\text{ж}}/V_3 \sim 4 \cdot 10^{-4}$, поправка к работе — доли процента.

Ответ. $\eta \approx 0{,}029 = 2{,}9\ \%$.