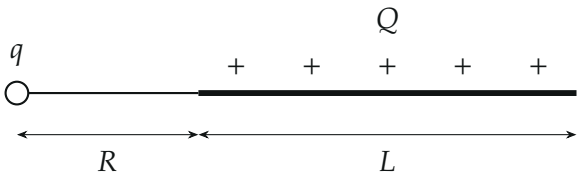
Стержень, шарик и нить

Задача 8. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 8] Тонкий жёсткий непроводящий стержень длиной L несёт на себе электрический заряд Q, который равномерно распределён по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд q и прикреплён к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной R. Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.



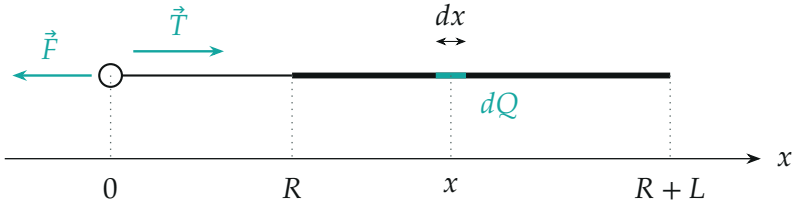
Поясняющий рисунок: заряд Q распределён по стержню длиной L (для определённости $Q > 0$), шарик q привязан нитью длиной R к ближнему концу.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Одноимённые заряды отталкиваются: стержень отталкивает шарик, нить его удерживает. Для шарика в равновесии сила натяжения равна по модулю электрической силе, действующей на него со стороны стержня. Заряд стержня распределён, закон Кулона годится только для точечных зарядов, поэтому стержень разбиваем на маленькие элементы, каждый из которых — точечный заряд, и складываем силы (принцип суперпозиции). Класс задачи: поле протяжённого заряженного тела — суммирование по малым элементам.

Обозначения и оси. Ось x направлена вдоль стержня от шарика, начало — в шарике. Нить длиной R тоже лежит на этой оси: ближний конец стержня в точке $x = R$, дальний — в точке $x = R + L$. $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\lambda = \dfrac{Q}{L}$ — линейная плотность заряда стержня.

Почему шарик на оси стержня. Если бы он был сбоку, все малые силы, действующие на стержень со стороны шарика, давали бы относительно конца, к которому привязана нить, моменты одного знака, и стержень бы повернулся. Равновесие возможно только когда сила идёт вдоль

стержня, то есть шарик лежит на его оси (на продолжении за тот конец, к которому привязана нить: от второго конца нить пришлось бы вести вдоль самого стержня). Нить тоже вдоль оси: сила $\vec{T}$ нити уравновешивает электрическую силу $\vec{F}$.



Малый элемент стержня dx на расстоянии x от шарика несёт заряд dQ. Электрическая сила $\vec{F}$ на шарик — от стержня, натяжение нити $\vec{T}$ — к стержню.

1. Условие равновесия шарика. Силу тяжести не учитываем, значит, на шарик действуют только $\vec{F}$ (отталкивание от стержня, направлена от стержня) и $\vec{T}$ (натяжение нити, направлена к стержню). В проекции на ось x: $T - F = 0$, отсюда $T = F$.

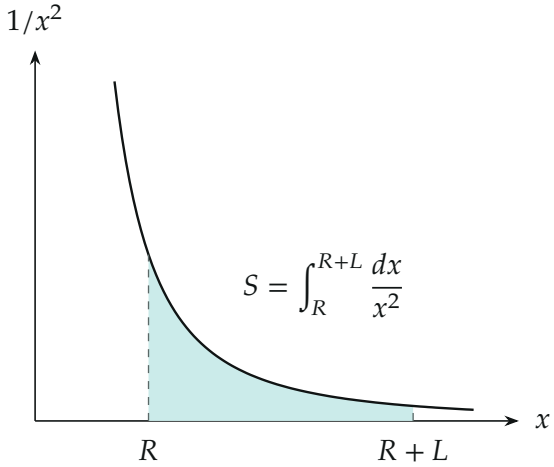
2. Сила от малого элемента. Элемент длиной dx на расстоянии x несёт заряд $dQ = \lambda\, dx = \dfrac{Q}{L}\, dx$ и действует на шарик по закону Кулона для точечных зарядов

$$dF = k\,\frac{q\,dQ}{x^2} = \frac{kqQ}{L}\,\frac{dx}{x^2}.$$

Все элементы отталкивают шарик вдоль оси x в одну сторону (при $Qq > 0$ — от стержня), поэтому модули складываются.

3. Суммирование по стержню (интегрируем от ближнего конца $x = R$ до дальнего $x = R + L$):

$$F = \frac{kqQ}{L}\int_R^{R+L}\frac{dx}{x^2} = \frac{kqQ}{L}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}\right) =$$
$$= \frac{kqQ}{L}\cdot\frac{L}{R(R+L)} = \frac{kqQ}{R(R+L)}.$$



Сила пропорциональна площади под графиком $1/x^2$ между $x = R$ и $x = R+L$ (закрашено); ближние элементы стержня вносят в неё основной вклад.

4. Натяжение нити. Из условия $T = F$:

$$T = \frac{kqQ}{R(R+L)} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R(R+L)}.$$

Так как $Qq > 0$ (по условию $Q/q > 0$), заряды одного знака, шарик отталкивается, нить натянута; при разных знаках шарик притягивался бы к стержню, и нить провисла бы.

Второй способ (через энергию). Потенциальная энергия шарика в поле стержня: энергии взаимодействия с элементами складываются, $W(R) = kq\int_R^{R+L} \frac{dQ}{x} = \frac{kqQ}{L}\ln\frac{R+L}{R}$. Сила, отталкивающая шарик от стержня, равна убыли энергии на единицу его смещения от стержня (энергия при удалении убывает):

$$F = -\frac{dW}{dR} = -\frac{kqQ}{L}\left(\frac{1}{R+L} - \frac{1}{R}\right) = \frac{kqQ}{R(R+L)},$$

тот же результат.

Обратите внимание: заряд стержня нельзя «собрать» в центр: так получилось бы $kqQ/(R+L/2)^2$, что при $R = L$ даёт $0{,}444\,kqQ/L^2$ вместо

верных $0{,}5\,kqQ/L^2$.

Проверка. Размерность: kqQ/R^2 — сила (в ньютонах), как и $kqQ/(R(R+L))$. Предельные случаи: при $L \to 0$ стержень становится точечным зарядом Q на расстоянии R, $F \to kqQ/R^2$ — закон Кулона; при $R \gg L$ то же, $F \approx kqQ/R^2$. Всегда $F < kqQ/R^2$: дальние элементы стержня действуют слабее, чем если бы весь заряд был в ближнем конце. При $R \to 0$ сила растёт как $kqQ/(LR)$ — шарик близко к концу заряженной линии, сила неограниченна, но слабее кулоновской $1/R^2$.

Ответ. $T = \dfrac{kqQ}{R(R+L)} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R(R+L)}$.