Малые колебания заряженного шарика

Задача 9. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 9] На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m, который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарику прикреплена непроводящая пружинка жёсткостью k, расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле $\vec{E}$, направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.

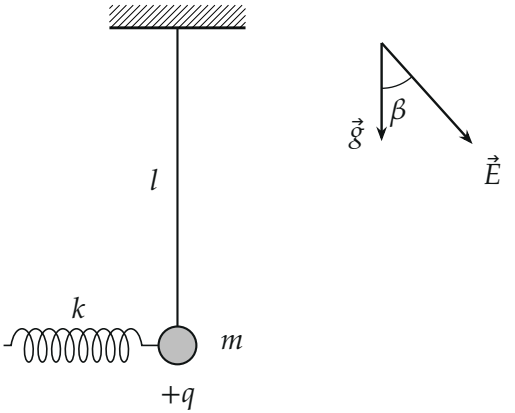
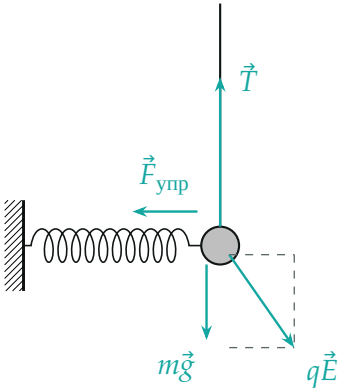


Рисунок условия: шарик на нити длиной l, пружина слева, справа — направления $\vec{g}$ и $\vec{E}$ (угол между ними β).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Вертикальная составляющая силы $q\vec{E}$ складывается с тяжестью — она как бы увеличивает g. Горизонтальная составляющая растягивает пружину, и в положении равновесия пружина создаёт силу, ровно её компенсирующую. При малом отклонении на угол φ возвращающую силу даёт тяжесть, вертикальная составляющая силы поля и пружина, а «лишняя» горизонтальная часть остаётся второго порядка малости и период не меняет. Класс задачи: малые колебания — записать уравнение движения вдоль дуги и привести его к виду $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$.

Обозначения и оси. φ — угол отклонения нити от вертикали (вправо — положительный), ось τ — касательная к дуге в сторону роста φ.

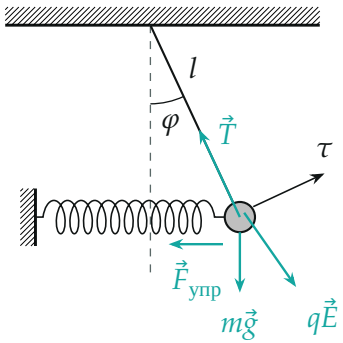
Вектор $\vec{E}$ направлен вниз и вправо под углом β к вертикали: его вертикальная составляющая $E\cos\beta$ направлена вниз, горизонтальная $E\sin\beta$ — вправо. Δ — растяжение пружины в положении равновесия.



Равновесие: нить вертикальна. Пунктир — составляющие силы $q\vec{E}$: горизонтальная $qE\sin\beta$ уравновешена растянутой пружиной, вертикальная $qE\cos\beta$ вместе с mg — натяжением нити.

1. Положение равновесия. Горизонталь: $F_{\text{упр}} = k\Delta = qE\sin\beta$ (пружина растянута: поле тянет шарик вправо, пружина влево). Вертикаль: $T_0 = mg + qE\cos\beta$.

2. Шарик отклонился на малый угол φ (вправо). Он движется по дуге окружности радиусом l: $x = l\sin\varphi$ — горизонтальное смещение, вдоль дуги $s = l\varphi$. Растяжение пружины стало $\Delta + x$ (горизонтальный сдвиг шарика; вертикальный сдвиг $l(1-\cos\varphi) \sim l\varphi^2/2$ — второго порядка, на направление пружины не влияет).



Шарик отклонён на угол φ (для наглядности большой). Ось τ касательна к дуге, нить перпендикулярна ей.

3. Второй закон Ньютона вдоль τ. Нить направлена по радиусу, её натяжение T на ось τ проекции не даёт. Проекции остальных сил на τ (вектор $\vec{\tau} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$; тяжесть $(0, -mg)$, сила поля $qE(\sin\beta, -\cos\beta)$, пружина $(-k(\Delta + l\sin\varphi),\ 0)$):

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + qE(\sin\beta\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi) - k(\Delta + l\sin\varphi)\cos\varphi.$$

Слагаемые с $\cos\varphi$, не содержащие φ явно, объединяются: $(qE\sin\beta - k\Delta)\cos\varphi = 0$ по условию равновесия (п. 1). Остаётся

$$ml\ddot{\varphi} = -(mg + qE\cos\beta)\sin\varphi - kl\sin\varphi\cos\varphi.$$

Обратите внимание: горизонтальная составляющая силы поля $qE\sin\beta$ в уравнение не вошла — она целиком ушла на предварительное растяжение пружины, а при отклонении её вклад $qE\sin\beta(\cos\varphi - 1)$ имеет второй порядок малости.

4. Малые колебания: $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ (поправки $\sim \varphi^3$ отбрасываем):

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{qE\cos\beta}{ml} + \frac{k}{m}\right)\varphi = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, $\omega^2 = \dfrac{g}{l} + \dfrac{qE\cos\beta}{ml} + \dfrac{k}{m}$, период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{l} + \dfrac{qE\cos\beta}{ml}}}.$$

Второй способ (энергия). Потенциальная энергия системы при отклонении φ (отсчёт от положения равновесия):

$$U = \underbrace{(mg + qE\cos\beta)\,l(1 - \cos\varphi)}_{\text{тяжесть и вертикальная часть поля}} + \tfrac{1}{2}kl^2\sin^2\varphi,$$

линейные по $\sin\varphi$ слагаемые от работы $qE\sin\beta$ и от предварительно-

го растяжения пружины взаимно уничтожаются. При малых φ: $U \approx \frac{1}{2}\left[(mg + qE\cos\beta)l + kl^2\right]\varphi^2$, кинетическая энергия $K = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$. Дифференцируем $K + U = \text{const}$ по времени и сокращаем на $\dot{\varphi}$: $ml^2\ddot{\varphi} = -\left[(mg + qE\cos\beta)l + kl^2\right]\varphi$ — то же уравнение.

Проверка. Размерность: k/m, g/l и $qE/(ml)$ — все в с^{-2} (последнее: $\text{Н}/(\text{кг}\cdot\text{м}) = \text{с}^{-2}$). Пределы: при $E = 0$ и $k = 0$ — обычный маятник $T = 2\pi\sqrt{l/g}$; при $\beta = 90^\circ$ вертикальной составляющей нет, поле влияет только через равновесное растяжение и период от E не зависит — согласуется с выводом, что горизонтальная часть периода не меняет; при $\beta = 0$ поле просто увеличивает g до $g + qE/m$. Смысл: частоты возвращающих факторов складываются в квадрате — пружина и «эффективная тяжесть» работают параллельно.

Ответ. $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{l} + \dfrac{qE\cos\beta}{ml}}}$.