СВЧ-антенна из излучателей

Задача 10. [МОШ 2010/11, 11 класс, задача 10] СВЧ-антенна радиолокатора устроена следующим образом: вдоль прямой линии на равных расстояниях $d = 2{,}5$ см друг от друга расположены $N = 100$ излучателей электромагнитных волн длиной $\lambda = 2d$ (см. рис.). Каждый из них излучает сферическую волну, причём модуль напряжённости поля n-го излучателя ($0 \leq n \leq N$) изменяется по закону $E(t) = A\sin(\omega t - kr_n + n\dfrac{\pi}{2}\cos\Omega t)$, где r_n — расстояние от данного излучателя, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а $\Omega \ll \omega$. Найдите, как зависит от времени угол между лучом, излучаемым радиолокатором в плоскости рисунка, и нормалью к цепочке излучателей. Оцените угловую ширину луча и его угловую скорость.

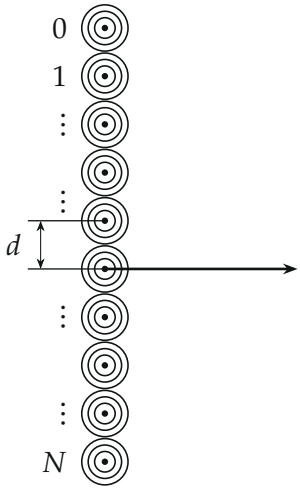
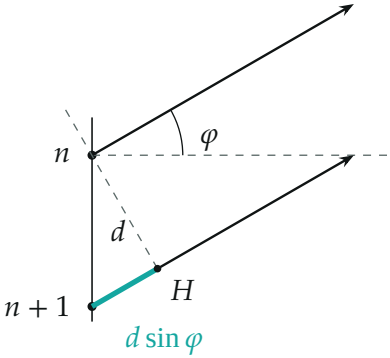


Рисунок условия: $N+1$ излучателей на прямой, расстояние между соседними d; стрелка — нормаль к цепочке.

▲ **Решение. Что происходит.** Все излучатели работают на одной частоте ω, но у каждого своя фаза: n-й добавляет $n \cdot \frac{\pi}{2}\cos\Omega t$, то есть фазы растут вдоль цепочки по линейному закону. Волны от всех излучателей усиливают друг друга только в том направлении, где они приходят в одной фазе; по принципу Гюйгенса — Френеля волновой фронт — общая

огибающая элементарных волн, плоскость, перпендикулярная лучу. Добавка $\frac{\pi}{2}\cos\Omega t$ медленно меняется ($\Omega \ll \omega$: за один период волны её можно считать постоянной), поэтому направление луча поворачивается — антенна качает луч, ничего механически не двигая. Класс задачи: интерференция многих когерентных источников (фазированная решётка).

Обозначения и оси. Угол φ отсчитываем от нормали к цепочке, положительный — в сторону излучателя с номером 0. Расстояние до точки наблюдения много больше длины цепочки $Nd = 2{,}5$ м, поэтому лучи от разных излучателей в эту точку параллельны. $kd = \dfrac{2\pi}{\lambda}d = \pi$.



Лучи соседних излучателей под углом φ к нормали. Пунктир — след волнового фронта через излучатель n (перпендикулярен лучам); луч от излучателя $n+1$ длиннее луча от n на отрезок $d\sin\varphi$ (бирюзовый).

1. Разность хода соседних излучателей. Лучи параллельны, и излучатель $n+1$ дальше от фронта, проведённого через излучатель n, чем сам n, на $d\sin\varphi$ (прямоугольный треугольник: гипотенуза d, угол при излучателе n между цепочкой и фронтом равен φ). Значит, $r_{n+1} - r_n = d\sin\varphi$.

2. Фазы волн в точке наблюдения. Фаза n-й волны $\theta_n = \omega t - kr_n + n\frac{\pi}{2}\cos\Omega t$. Для соседних излучателей, используя $r_n = r_0 + nd\sin\varphi$:

$$\theta_{n+1} - \theta_n = -kd\sin\varphi + \frac{\pi}{2}\cos\Omega t = \pi\left(-\sin\varphi + \frac{1}{2}\cos\Omega t\right).$$

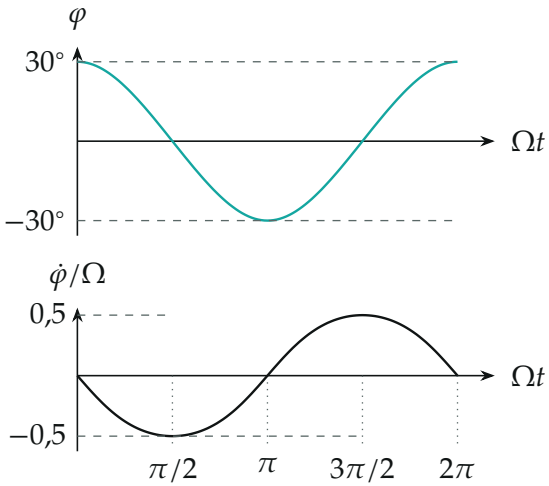
Суммарное поле максимально, когда разность фаз соседних излучателей кратна 2π: тогда все $N+1$ волн синфазны (набег фаз вдоль цепочки $n \cdot 2\pi m$). Условие $\theta_{n+1} - \theta_n = -2\pi m$ даёт

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\cos\Omega t + 2m.$$

Так как $|\sin\varphi| \le 1$ и $|\frac{1}{2}\cos\Omega t| \le \frac{1}{2}$, подходит только $m = 0$: других (побочных) максимумов нет, потому что расстояние между излучателями $d = \lambda/2 < \lambda$. Вывод: единственный луч направлен под углом

$$\varphi(t) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\cos\Omega t\right),$$

луч качается около нормали между $\pm\arcsin\frac{1}{2} = \pm 30^\circ$ с периодом $2\pi/\Omega$.



Сверху — угол луча $\varphi(t)$; снизу — его угловая скорость $\dot\varphi/\Omega$: максимальна, когда луч проходит нормаль ($\varphi = 0$), и равна нулю в крайних положениях ($\pm 30^\circ$).

3. Угловая скорость луча. Продифференцируем $\sin\varphi = \frac{1}{2}\cos\Omega t$ по

времени: $\cos\varphi\,\dot\varphi = -\frac{\Omega}{2}\sin\Omega t$, откуда

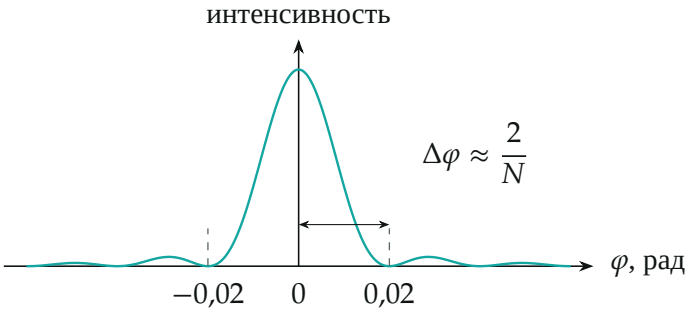
$$\dot\varphi = -\frac{\Omega}{2}\,\frac{\sin\Omega t}{\sqrt{1-\frac14\cos^2\Omega t}}.$$

Модуль максимален при $\sin\Omega t = \pm1$, то есть при $\cos\Omega t = 0$, $\varphi = 0$ (луч идёт вдоль нормали): $|\dot\varphi|_{\max} = \dfrac{\Omega}{2}$. В крайних положениях $\varphi = \pm30^\circ$ луч останавливается и поворачивает обратно.

4. Ширина луча. Рассмотрим луч вдоль нормали, $\varphi_0 = 0$, и направление, отклонённое на малый угол $\Delta\varphi$. Соседние излучатели дают сдвиг фаз $\delta = kd\sin\Delta\varphi \approx \pi\Delta\varphi$, а N синусоид с одинаковой амплитудой и последовательным сдвигом δ дают амплитуду $A\,\dfrac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$. Она впервые обращается в нуль при $N\delta/2 = \pi$, то есть $\delta = \dfrac{2\pi}{N}$, откуда

$$\Delta\varphi \approx \frac{2}{N} = \frac{\lambda}{Nd} = 0{,}02\text{ рад} \approx 1^\circ.$$

Это угловая ширина главного лепестка (от максимума до первого нуля); ширина на уровне половинной мощности около $0{,}9\cdot\dfrac{2}{N} \approx 0{,}018$ рад — то же по порядку. Физический смысл: цепочка длиной $D = Nd = 2{,}5$ м действует как отверстие размером D, угол дифракции λ/D.



Главный лепесток направленности при $N = 100$ (расчёт по формуле суммы N синусоид): от максимума до первого нуля $\Delta\varphi \approx 0{,}02$ рад.

Проверка. Размерность: $\sin\varphi$ безразмерен, $\dot\varphi \sim \Omega$ — с^{-1}. Предел $\Omega \to 0$: добавка к фазе постоянна ($\cos\Omega t \to 1$), луч стоит под углом 30° — неподвижный луч, повёрнутый одной только разностью фаз. Если бы $d > \lambda$, появились бы побочные лучи (дифракционные порядки решётки); здесь $d = \lambda/2$, и он один. Второй способ для ширины: апертура $D = Nd$ даёт $\lambda/D = 2d/(Nd) = 2/N$ — то же. Смысл: такая антенна «сканирует» пространство в секторе 60° острым лучом шириной около одного градуса, не двигая ни одной детали.

Ответ. Луч единственный, его угол с нормалью $\varphi(t) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\cos\Omega t\right)$ (качание в пределах $\pm 30°$); максимальная угловая скорость $\frac{1}{2}\Omega$ (при $\varphi = 0$); угловая ширина луча $\Delta\varphi \approx 2/N = 0{,}02$ рад $\approx 1°$.