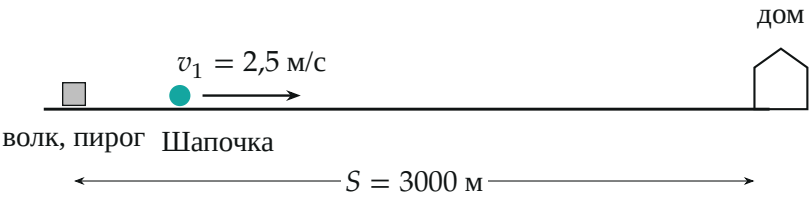
Красная Шапочка и волк

Задача 1. [МОШ 2010/11, 7 класс, задача 1] Красная Шапочка испекла 20 пирогов, сложила их в корзинку и отправилась через лес к больной бабушке. Когда до бабушки ей оставалось пройти 3 км, из кустов выскочил голодный волк с явным намерением съесть хоть что-нибудь. Увидев его, Красная Шапочка бросила на землю один пирог и побежала со скоростью 2,5 м/с. Волк съел пирог за 1 минуту и побежал за Красной Шапочкой со скоростью 5 м/с. Тогда Красная Шапочка стала бросать пироги, как только волк начинал ее догонять, и так добежала до бабушкиного дома. Сколько пирогов досталось бабушке?



Поясняющий рисунок: момент встречи. Пирог брошен, волк его ест, Шапочка уже бежит к дому.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равномерное движение двух тел с остановками одного из них. Волк вдвое быстрее Шапочки, но за каждый пирог теряет минуту. Шапочка должна бросать столько пирогов, чтобы волк за время бега и поедания пирогов не успел добраться до дома раньше неё. Главная идея — сравнить полные времена, которые нужны каждому, чтобы оказаться у бабушкиного дома.

Обозначения. $S = 3000$ м — расстояние от места встречи до дома, $v_1 = 2{,}5$ м/с — скорость Шапочки, $v_2 = 5$ м/с — скорость волка, $\tau = 60$ с — время, за которое волк съедает один пирог, n — число брошенных пирогов. Начало отсчёта — место встречи и момент, когда волк выскочил из кустов; ось x направлена к дому.

1. Время Шапочки. Она бежит равномерно и без остановок (пироги бросает на бегу):

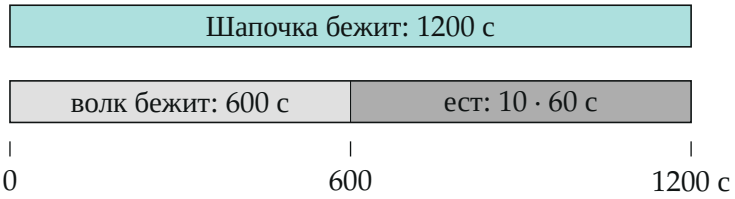
$$t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{3000}{2{,}5} = 1200 \text{ с}.$$

2. Время волка. Волк бежит равномерно только тогда, когда не ест: его беговое время

$$t_{\text{бег}} = \frac{S}{v_2} = \frac{3000}{5} = 600 \text{ с},$$

а каждый брошенный пирог добавляет $\tau = 60$ с стоянки. Он стартует из той же точки и в тот же момент, что и Шапочка (первый пирог брошен сразу), значит, до дома он добирается за

$$t_2 = t_{\text{бег}} + n\tau = 600 + 60\,n \text{ с}.$$



Полоски — времена до дома. Бирюзовая — Шапочка, нижняя — волк при $n = 10$: бег плюс десять пирогов; полоски одной длины.

3. Условие того, что волк не успел. Шапочка добежит до дома, если волк окажется там не раньше неё:

$$t_2 \geqslant t_1 \;\Rightarrow\; 600 + 60\,n \geqslant 1200 \;\Rightarrow\; n \geqslant 10.$$

Девять пирогов мало: тогда $t_2 = 1140$ с < 1200 с, и волк поспел бы к дому первым, значит, догнал бы Шапочку. При $n = 10$ времена равны: волк, съев десятый пирог, добегает в тот момент, когда Шапочка уже на пороге.

4. Второй способ — по циклам. Пусть пирог брошен в точке x в момент t. Волк ест 60 с, Шапочка за это время убегает на $v_1\tau = 150$ м. Дальше волк сближается с ней со скоростью $v_2 - v_1 = 2{,}5$ м/с и ликвидирует отрыв 150 м за $150/2{,}5 = 60$ с. Весь цикл — 120 с, и за него Шапочка пробегает $2{,}5 \cdot 120 = 300$ м. Значит, пироги брошены в точках $0,\ 300,\ 600, \ldots$ м, а k-я встреча (после k пирогов) происходит в точке $300k$ м. Дом в 3000 м: десятая встреча приходится ровно на дом,

так что бросать приходится 10 пирогов (в точках $0,\ 300, \ldots, 2700$ м), а в точке 3000 м она уже дома.

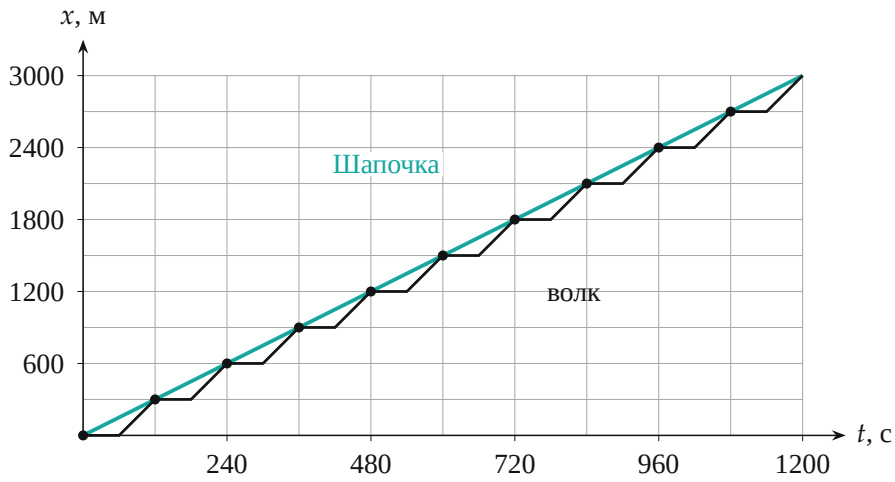


График $x(t)$. Бирюзовая прямая — Шапочка, чёрная ломаная — волк: горизонтальный участок — он ест (60 с), наклонный — бежит и догоняет. Точки на прямой — места, где брошены пироги: десять точек, а десятая встреча совпадает с домом ($t = 1200$ с, $x = 3000$ м).

Обратите внимание. Ломаная волка касается прямой Шапочки ровно в точках $(120k,\ 300k)$ — волк каждый раз догоняет, и всякий раз нужен новый пирог.

Проверка. Размерность: время — метры, делённые на метры в секунду, секунды. Предельный случай: если бы волк пирогов не ел совсем ($\tau \to 0$), он догнал бы Шапочку у самого начала. С пирогами волк тратит $60n$ с на еду, что при $n = 10$ как раз равно разнице $1200 - 600 = 600$ с между временем Шапочки и беговым временем волка.

Физический смысл: пироги работают как «время», которое Шапочка покупает у волка; десять пирогов дают ровно 600 с — этого хватает, чтобы волк, вдвое более быстрый, не опередил её на дистанции в 3 км. Бабушке остаётся $20 - 10 = 10$ пирогов.

Ответ. Бабушке достанется $20 - 10 = 10$ пирогов.