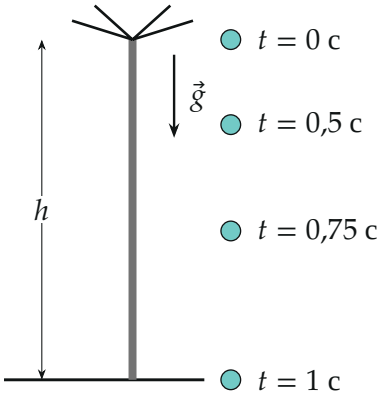
Падающий кокос

Задача 2. [МОШ 2010/11, 7 класс, задача 2] Наблюдая за кокосом, свободно падающим с вершины пальмы, турист обнаружил, что пройденное им расстояние s зависит от времени падения t как $s = \dfrac{gt^2}{2}$, где $g = 10$ м/с^2. Турист также определил, что средняя скорость кокоса за время падения составляет $v_{\text{ср}} = 5$ м/с. Определите высоту пальмы h.



Поясняющий рисунок: положения кокоса в моменты 0; 0,5; 0,75 и 1 с по формуле из условия, h — высота пальмы. Видно, что за равные времена кокос проходит всё большие пути.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Кокос падает без начальной скорости с ускорением g, значит, движение равноускоренное: скорость растёт линейно, $v = gt$, путь — по формуле $s = gt^2/2$. Высота пальмы — это путь за всё время падения T. Скорость $v_{\text{ср}}$ связывает h и T, а ещё одна связь между ними — формула пути. Из двух уравнений находим обе неизвестные.

Обозначения. T — время падения, h — высота пальмы, $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость за всё падение.

1. Средняя скорость. Средняя скорость на всём пути — весь путь, делённый на всё время:

$$v_{\text{ср}} = \frac{h}{T}.$$

2. Высота через время. Кокос прошёл h за время T, то есть по формуле из условия

$$h = \frac{gT^2}{2}.$$

3. Время падения. Подставим h в формулу средней скорости:

$$v_{\text{ср}} = \frac{gT^2/2}{T} = \frac{gT}{2} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v_{\text{ср}}}{g} = \frac{2 \cdot 5}{10} = 1 \text{ с}.$$

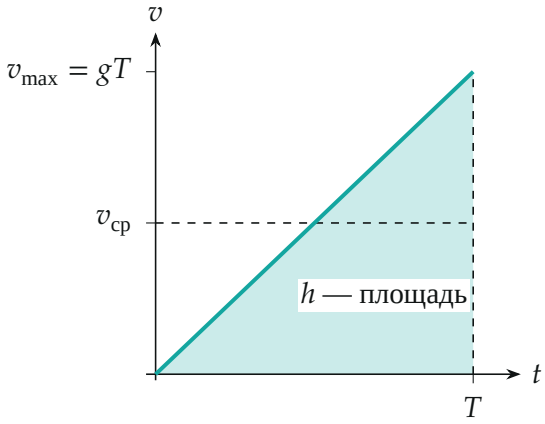


График скорости $v = gt$. Площадь треугольника под ним равна пути h; она же равна площади прямоугольника высотой $v_{ср}$ — поэтому $v_{ср}$ вдвое меньше конечной скорости.

4. Высота пальмы.

$$h = v_{\text{ср}}T = 5 \cdot 1 = 5 \text{ м}, \qquad \text{или} \qquad h = \frac{gT^2}{2} = \frac{10 \cdot 1}{2} = 5 \text{ м}.$$

Обе формулы дают одно значение — это и есть проверка согласованности условия. В общем виде $h = \dfrac{2v_{\text{ср}}^2}{g}$.

Обратите внимание. Средняя скорость при равноускоренном движении из состояния покоя — половина конечной скорости. Конечная ско-

рость кокоса $gT = 10$ м/с — вдвое больше $v_{ср}$; считать среднюю скорость равной конечной нельзя.

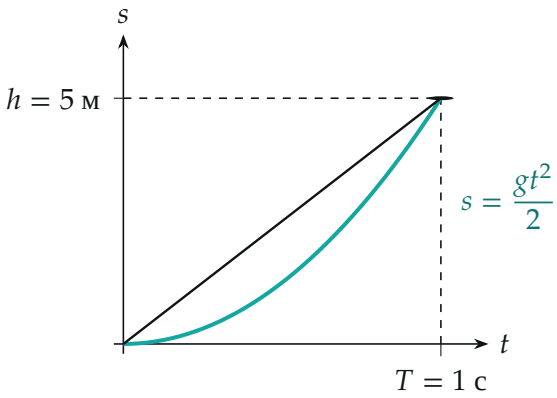


График пути $s(t)$ — парабола. Чёрная хорда, соединяющая начало и конец падения, имеет наклон h/T — это и есть средняя скорость.

Проверка. Размерность: $\dfrac{v^2}{g}$ — это $\dfrac{\text{м}^2/\text{с}^2}{\text{м}/\text{с}^2} = \text{м}$. Пять метров — высота невысокой пальмы, время 1 с и конечная скорость 10 м/с (36 км/ч) для такого падения правдоподобны.

Физический смысл: у равноускоренного падения со старта средняя скорость — ровно половина конечной, поэтому, зная среднюю, мы сразу получаем конечную $2v_{ср} = 10$ м/с, а затем время v/g.

Ответ. $h = \dfrac{2v_{ср}^2}{g} = 5$ м (время падения $T = 1$ с).