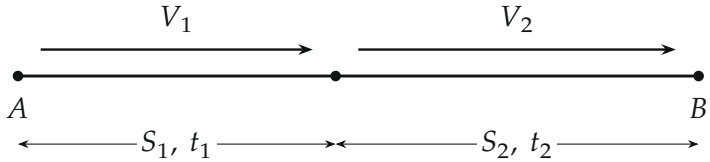
Две части пути автобуса

Задача 3. [МОШ 2010/11, 7 класс, задача 3] Братья Коля и Саша ехали на автобусе из пункта A в пункт B. Дорога состояла из двух частей, на каждой из которых автобус ехал с постоянной скоростью. На первой части скорость автобуса была равна V_1, а на второй части скорость была равна V_2. Средняя скорость автобуса на всём пути оказалась равной $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$. Коля и Саша поспорили о том, как соотносятся длины этих частей пути и времена их прохождения. Коля считает, что автобус половину пути ехал со скоростью V_1, а другую половину пути — со скоростью V_2. Саша считает, что автобус половину времени ехал со скоростью V_1, а другую половину времени — со скоростью V_2. Можно ли из условия задачи определить, прав ли кто-нибудь из братьев, и если да, то кто из них?



Поясняющий рисунок: путь AB состоит из двух участков с длинами S_1, S_2, на которых автобус ехал со скоростями V_1, V_2 за времена t_1, t_2. Длины участков на рисунке условны.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю скорость при равномерном движении на двух участках. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время, и именно её значение $(V_1 + V_2)/2$ задано. Предположения братьев — два конкретных способа поделить путь и время; главная идея — проверить, даёт ли каждый из них именно такую среднюю скорость, а потом найти все делёжки, которые её дают.

Обозначения. S_1, S_2 и t_1, t_2 — длины и времена первой и второй частей, $S = S_1 + S_2$, $t = t_1 + t_2$. На каждой части скорость постоянна, поэтому $S_1 = V_1 t_1$, $S_2 = V_2 t_2$.

1. Проверка версии Коли: равные половины пути, $S_1 = S_2 = S/2$**.** Времена частей

$$t_1 = \frac{S}{2V_1}, \qquad t_2 = \frac{S}{2V_2},$$

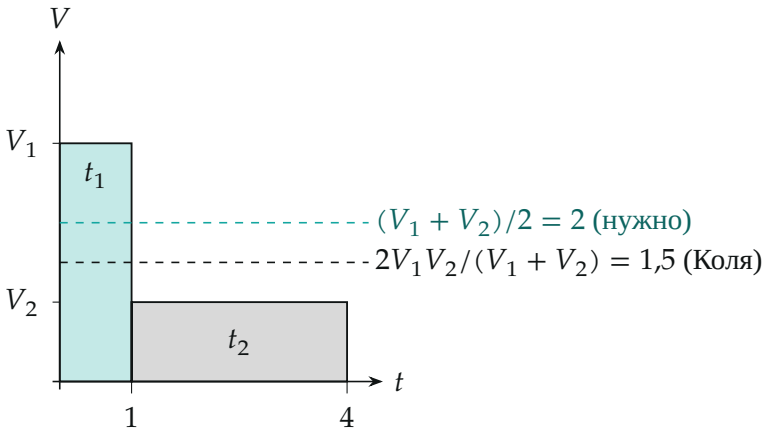
тогда средняя скорость на всём пути

$$V = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{S}{\dfrac{S}{2V_1} + \dfrac{S}{2V_2}} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2}.$$

Это среднее гармоническое. Сравним с заданным: разность среднего арифметического и среднего гармонического

$$\frac{V_1 + V_2}{2} - \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} = \frac{(V_1 + V_2)^2 - 4V_1V_2}{2(V_1 + V_2)} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2(V_1 + V_2)},$$

положительна при $V_1 \neq V_2$. Значит, при разных скоростях версия Коли даёт среднюю скорость *меньше* заданной — она не может быть верной.



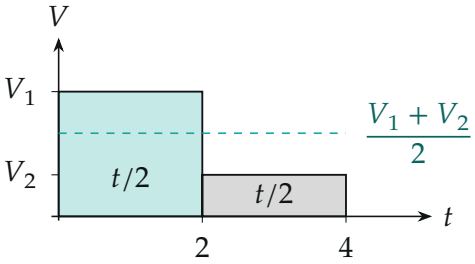
Пример для Коли: $V_1 = 3$, $V_2 = 1$ *(условные единицы), пути равны,* $S_1 = S_2 = 3$*. Тогда* $t_1 = 1$, $t_2 = 3$*, средняя скорость* $6/4 = 1{,}5$*, а не* $(3 + 1)/2 = 2$*. Площадь под ступенькой — пройденный путь.*

2. Проверка версии Саши: равные половины времени, $t_1 = t_2 =$

$t/2$. Пути частей $S_1 = V_1 t/2$, $S_2 = V_2 t/2$, и

$$V = \frac{S_1 + S_2}{t} = \frac{V_1 t/2 + V_2 t/2}{t} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Результат совпал с заданным при любых V_1 и V_2: версия Саши согласуется с условием всегда.



Пример для Саши: $V_1 = 3$, $V_2 = 1$, времена по 2. Площадь под графиком $= 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8$ — весь путь; делим на время 4 и получаем $2 = (V_1 + V_2)/2$. Если на графике времена равны, средняя скорость — середина между V_1 и V_2.

3. Что говорит условие само по себе. Сохраним $S_1 = V_1 t_1$, $S_2 = V_2 t_2$ и потребуем $V = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$:

$$\frac{V_1 t_1 + V_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{V_1 + V_2}{2} \Rightarrow 2V_1 t_1 + 2V_2 t_2 = V_1 t_1 + V_1 t_2 + V_2 t_1 + V_2 t_2.$$

Перенесём всё в одну часть и сгруппируем:

$$V_1 t_1 - V_1 t_2 - V_2 t_1 + V_2 t_2 = 0 \Rightarrow (V_1 - V_2)(t_1 - t_2) = 0.$$

Если $V_1 \neq V_2$, то $t_1 = t_2$: времена обязаны быть равны, то есть Саша прав, а длины частей $S_1 = V_1 t_1 \neq S_2 = V_2 t_1$ различны, так что Коля неправ. Если же $V_1 = V_2$, автобус ехал с одной скоростью, и оба разбиения совпадают: половина пути и половина времени — одно и то же.

Обратите внимание. Средняя скорость не равна среднему арифметическому скоростей, если время на участках разное; на половинах *пу-*

ти получается среднее гармоническое, оно всегда меньше. Равенство $(V_1 + V_2)/2$ получается только при равных временах.

Проверка. Подставим числа примера $V_1 = 3$, $V_2 = 1$: Коля даёт $6/(1 + 3) = 1{,}5 \neq 2$, Саша даёт $(3 \cdot 2 + 1 \cdot 2)/4 = 2 = (3 + 1)/2$. Предельный случай: при $V_1 \to V_2$ разность средних $\dfrac{(V_1 - V_2)^2}{2(V_1 + V_2)} \to 0$, и версия Коли тоже превращается в верную.

Физический смысл: быстрая часть пути лучше «весит» в среднем, если на ней проведено столько же времени, сколько на медленной; когда путь поровну, на медленной части проводится больше времени и средняя скорость падает.

Ответ. Да, можно: прав Саша — автобус ехал со скоростью V_1 и со скоростью V_2 одинаковое время (при $V_1 \neq V_2$ Коля не прав; при $V_1 = V_2$ разбиения совпадают).