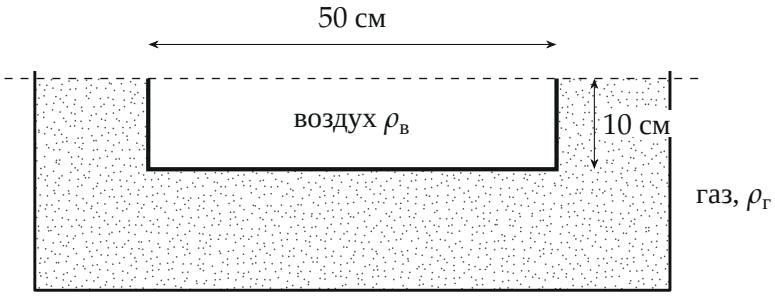
«Летучий голландец» из фольги

Задача 4. [МОШ 2010/11, 7 класс, задача 4] В Интернете сейчас можно найти видеозаписи различных физических опытов, в частности, такого: группа студентов напускает в большое корыто до краев какой-то тяжелый газ из баллона, а потом кладет на поверхность этого газа в корыте модель корабля, согнутую из алюминиевой фольги, и этот «корабль» плавает! Потом студенты зачерпывают ковшиком газ из корыта, переливают его внутрь «корабля», и он тонет. Найдите, какой минимальной плотностью должен обладать этот тяжелый газ, чтобы в нем мог плавать «корабль» в форме прямоугольного параллелепипеда (с открытым верхом), согнутый из бытовой алюминиевой фольги толщиной 25 мкм. Размеры «корабля»: длина — 50 см, ширина — 20 см, высота бортов — 10 см. Считать, что лишние куски, образовавшиеся при сгибании параллелепипеда из листа фольги, удалены. Плотность алюминия 2,7 г/см^3, плотность воздуха 1,3 кг/м^3.



Поясняющий рисунок: вид сбоку. «Корабль» стоит на поверхности газа, борта доходят до его уровня; внутри — воздух. Пунктир — уровень газа в корыте.

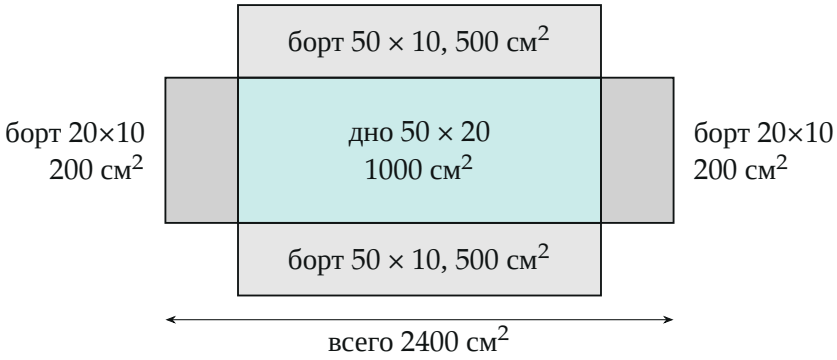
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о плавании тела. Тело плавает, когда сила Архимеда уравновешивает его вес; максимальная сила Архимеда достигается, когда «корабль» погружён до кромки бортов: глубже он погрузиться не может, не набрав газа внутрь (так он и тонет). Сила зависит от плотности газа: чем газ плотнее, тем больше выталкивающая сила. Минимальная плотность — это плотность, при которой мак-

симальная выталкивающая сила равна весу «корабля». Весит не только фольга: внутри «корабля» воздух, и он тоже тянет вниз.

Обозначения. $a = 50$ см, $b = 20$ см, $c = 10$ см — длина, ширина, высота бортов; $d = 25$ мкм $= 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ см — толщина фольги; $\rho_{ал} = 2{,}7$ г/см^3, $\rho_в = 1{,}3$ кг/м^3 $= 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ г/см^3; $\rho_г$ — искомая плотность газа.

1. Площадь фольги. «Корабль» — коробка без крышки: дно и четыре борта. Лишних кусков нет, поэтому фольга равна по площади развёртке:

$$S = ab + 2ac + 2bc = 50 \cdot 20 + 2 \cdot 50 \cdot 10 + 2 \cdot 20 \cdot 10$$
$$= 1000 + 1000 + 400 = 2400 \text{ см}^2.$$



Развёртка коробки: дно и четыре борта. Масштаб: 0,12 см на 1 см. Площади частей складываются в 2400 см².

2. Масса фольги. Объём фольги — площадь на толщину, масса — объём на плотность алюминия:

$$m_ф = \rho_{ал} S d = 2{,}7 \cdot 2400 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ г} = 16{,}2 \text{ г}.$$

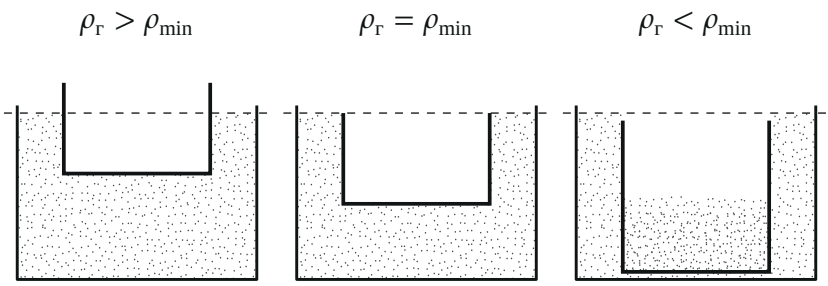
3. Масса воздуха внутри. Объём коробки $V = abc = 50 \cdot 20 \cdot 10 = 10^4$ см^3 $= 10$ л. Воздух заполняет её целиком (газ студенты в неё не наливали):

$$m_в = \rho_в V = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 \text{ г} = 13 \text{ г}.$$

Фольга по объёму (6 см^3) пренебрежимо мала по сравнению с коробкой, и объём вытесненного газа можно считать равным V.

4. Условие плавания. На «корабль» (фольга плюс воздух внутри) действуют сила тяжести $(m_ф + m_в)g$, направленная вниз, и сила Архимеда, направленная вверх. При погружении до кромки бортов вытесняется газ объёмом V, и сила Архимеда максимальна: $\rho_г g V$. Плавание возможно, когда она не меньше веса:

$$\rho_г g V \geqslant (m_ф + m_в)g \quad \Rightarrow \quad \rho_г \geqslant \frac{m_ф + m_в}{V}.$$



Три случая. Слева: газ плотнее минимального, «корабль» сидит неглубоко. В середине: бортик на уровне газа — предельный случай. Справа: газ слишком лёгкий, «корабль» набирает газ и тонет.

5. Минимальная плотность.

$$\rho_{min} = \frac{16{,}2 + 13}{10^4} \frac{г}{см^3} = 2{,}92 \cdot 10^{-3} \frac{г}{см^3} = 2{,}92 \frac{кг}{м^3}.$$

Обратите внимание. Воздух внутри «корабля» считать обязательно: 13 г — почти столько же, сколько фольги. Без него получилось бы 1,62 кг/м^3, то есть вдвое меньше верного.

Проверка. Размерность: масса, делённая на объём, — плотность. Газ должен быть примерно в 2,2 раза тяжелее воздуха (2,92/1,3): очень тяжёлые газы вроде шестифтористой серы (около 6 кг/м^3) для опыта годятся. Предельный случай: чем выше борта, тем больше объём коробки по сравнению с площадью фольги, и ρ_{min} падает, приближаясь к плотности воздуха 1,3 кг/м^3 сверху, — ведь тогда «корабль» почти целиком состоит из воздуха.

Физический смысл: «корабль» вместе со своим воздухом — тело средней плотности 2,92 кг/м^3; плавает на газе той же или большей плотности.

Ответ. $\rho_г \geqslant \dfrac{\rho_{ал}\, S\, d + \rho_в\, abc}{abc} \approx 2{,}92$ кг/м^3.