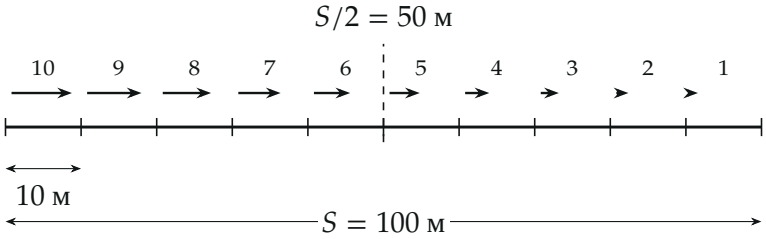
Забег с убывающей скоростью

Задача 1. [МОШ 2010/11, 8 класс, 1-й тур, задача 1] Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м со скоростью 9 м/с, следующие 10 м со скоростью 8 м/с, и так далее… Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью спортсмен пробежал первую половину дистанции $S/2$?



Поясняющий рисунок: десять участков по 10 м; число над участком — скорость на нём в м/с, длина стрелки пропорциональна скорости. После десятого участка скорость стала бы равна нулю — спортсмен останавливается. Пунктир — середина дистанции.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Скорость спортсмена меняется скачками, но на каждом десятиметровом участке остаётся постоянной, значит, каждый участок — равномерное движение, и время на нём равно длине участка, делённой на скорость. Полное время — сумма времён по участкам. Главная идея — не пользоваться «средней скоростью по участкам» (она вводит в заблуждение), а складывать именно времена.

Обозначения. $l = 10$ м — длина каждого участка, $v_k = 10 - (k-1)$ м/с — скорость на участке номер k ($k = 1, 2, \ldots, 10$: $v_1 = 10$ м/с, …, $v_{10} = 1$ м/с), t_k — время на k-м участке. Следующая скорость была бы равна нулю — спортсмен остановился, поэтому участков всего десять и $S = 10l = 100$ м.

Пункт 1. Время всего забега.

1. Время на участке. На участке скорость постоянна, поэтому

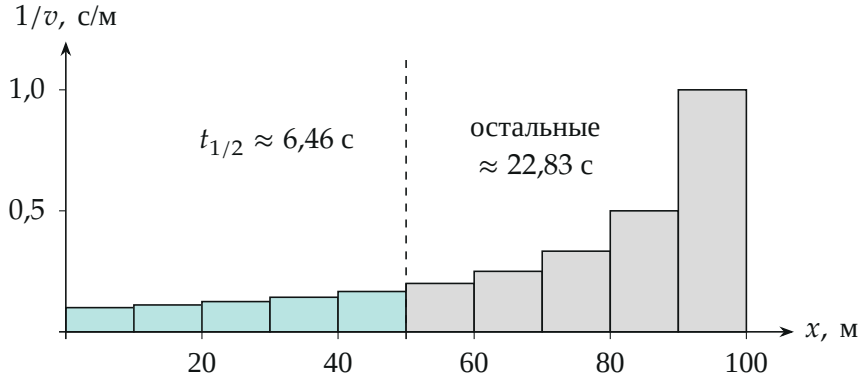
$$t_k = \frac{l}{v_k} = \frac{10}{11-k} \text{ с.}$$

2. Складываем. Полное время — сумма по всем десяти участкам:

$$\begin{aligned} t &= \sum_{k=1}^{10} t_k \\ &= 10\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right) \\ &= 10\cdot\frac{7381}{2520}\ \text{с} \approx 29{,}29\ \text{с}. \end{aligned}$$

Значения t_k и накопленное время (скорость в м/с, время в с):

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v_k	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
t_k	1,00	1,11	1,25	1,43	1,67	2,00	2,50	3,33	5,00	10,00
$\sum t$	1,00	2,11	3,36	4,79	6,46	8,46	10,96	14,29	19,29	29,29



Время как площадь. По оси y отложена обратная скорость $1/v$, поэтому площадь столбика высотой $1/v_k$ и шириной l равна $l/v_k = t_k$. Бирюзовая часть — первая половина дистанции, серая — вторая.

Пункт 2. Средняя скорость на первой половине.

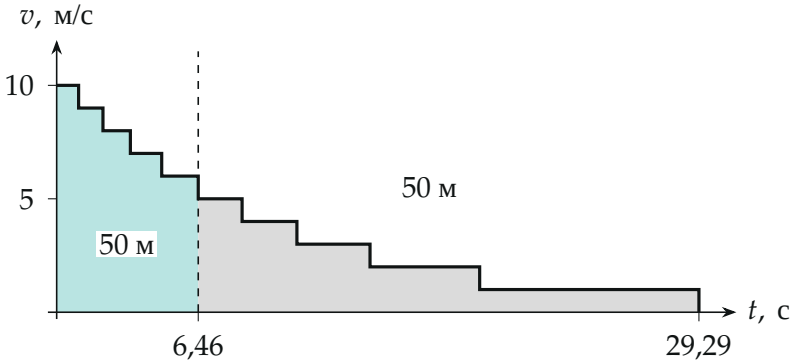
3. Где кончается половина. $S/2 = 50$ м — это ровно пять участков, скорости на которых $10, 9, 8, 7, 6$ м/с. Деление не попадает в середину участка: на границе между пятым и шестым.

4. Время первой половины.

$$t_{1/2} = 10\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6}\right) = 10 \cdot \frac{1627}{2520}\ \text{с} \approx 6{,}46\ \text{с}.$$

5. Средняя скорость — путь, делённый на время.

$$\langle v\rangle_{1/2} = \frac{S/2}{t_{1/2}} = \frac{50}{6{,}46}\ \text{м/с} \approx 7{,}74\ \text{м/с}.$$



Скорость от времени: ступеньки уже при быстром беге и шире при медленном. Площадь под графиком — пройденный путь; пунктир делит дистанцию 100 м на две равные площади по 50 м, но время делит на 6,46 с и 22,83 с.

Обратите внимание. Средняя скорость на первой половине равна не среднему арифметическому скоростей $(10 + 9 + 8 + 7 + 6)/5 = 8$ м/с, а меньше: на медленных участках спортсмен проводит больше времени, и они сильнее тянут среднюю скорость вниз. Среднее арифметическое верно, только когда равны *времена* на участках, а здесь равны *пути*.

Проверка. Размерность: метры на метры в секунду — секунды; метры на секунды — метры в секунду. Для первой половины ответ лежит между наименьшей (6) и наибольшей (10) скоростями на ней (7,74) и меньше арифметического среднего (8) — как и должно быть. Для всей дистанции $\langle v\rangle = 100/29{,}29 \approx 3{,}41$ м/с — меньше средней скорости первой половины, ведь вторая половина идёт медленнее и забирает 22,83 с из 29,29.

Физический смысл: при одинаковых длинах участков медленные участки «весят» в среднем скорость больше, так как проходятся дольше.

Ответ. Забег длился $t = 10\sum\limits_{k=1}^{10}\dfrac{1}{k}$ с $\approx$ 29,29 с; на первой половине дистанции средняя скорость $\langle v\rangle = \dfrac{50\text{ м}}{6{,}46\text{ с}} \approx 7{,}74$ м/с.