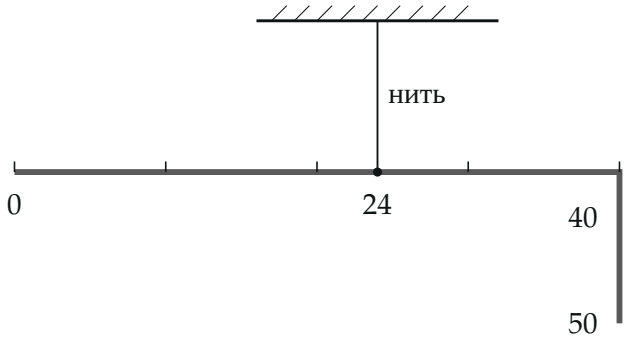
Согнутая линейка

Задача 2. [МОШ 2010/11, 8 класс, 1-й тур, задача 2] Металлическая плоская линейка имеет малую одинаковую всюду толщину, одинаковую по всей длине ширину и длину, равную 50 см. На концах линейки находятся отметки: 0 см и 50 см. Линейку согнули под прямым углом. Место сгиба приходится на отметку 40 см. За какое место нужно подвесить на тонкой нити согнутую линейку, то есть вблизи какой отметки нужно закрепить нить, чтобы длинный прямой участок линейки в положении равновесия был горизонтален?



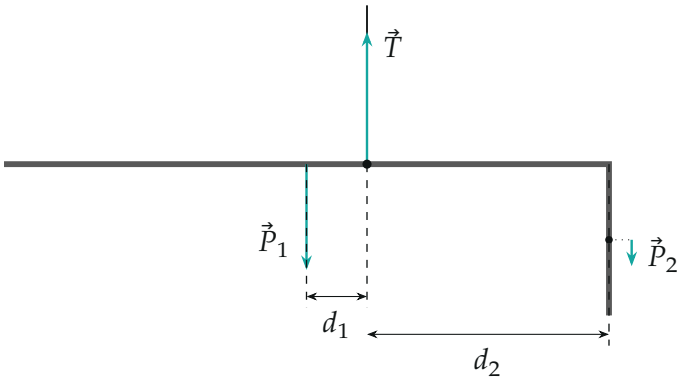
Поясняющий рисунок: согнутая линейка на нити. Числа — отметки линейки в сантиметрах; нить закреплена на отметке 24 (найдём это ниже). Масштаб: 0,2 см рисунка на 1 см линейки.

▲ **Решение. Что происходит.** Линейка висит на одной нити, значит, это твёрдое тело на подвесе. Оно в равновесии, когда сумма моментов сил тяжести относительно точки подвеса равна нулю, то есть центр масс лежит на вертикали под точкой подвеса. Линейка однородна, поэтому вес любого участка пропорционален его длине. Главная идея — заменить каждый из двух прямых участков одной силой тяжести в его середине и записать правило моментов относительно точки подвеса.

Обозначения. q — вес одного сантиметра линейки; ось x — вдоль длинного участка, от отметки 0 (направим вправо); x — ещё и координата точки подвеса P, то есть число на отметке, которое надо найти. Длинный участок (отметки $0 \dots 40$) — часть 1, короткий ($40 \dots 50$) — часть 2.

1. Положение частей. Длинный участок горизонтален по условию. Так как сгиб прямой, короткий участок вертикален и висит вниз от точки изгиба — на отметке 40.

2. Силы тяжести частей. Вес длинной части $P_1 = 40q$, приложен в её середине — на отметке 20 (координата $x_1 = 20$). Вес короткой части $P_2 = 10q$, приложен в её середине: она вертикальна, поэтому линия действия P_2 проходит через точку на отметке 40 ($x_2 = 40$) — плечо считаем по горизонтали, от высоты точки приложения момент не зависит.



Силы, действующие на линейку: $\vec{T}$ — сила натяжения нити в точке подвеса, $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ — силы тяжести длинной и короткой частей. Плечи d_1, d_2 — горизонтальные расстояния от линии нити до линий действия сил (длины стрелок примерно пропорциональны модулям: $40q$ и $10q$).

3. Правило моментов относительно точки подвеса. Сила натяжения нити проходит через P, её момент равен нулю. Сила $\vec{P}_1$ приложена левее точки подвеса (отметка $20 < x$) и поворачивает линейку против часовой стрелки, сила $\vec{P}_2$ — правее и поворачивает по часовой стрелке. Равновесие: моменты равны.

$$P_1\,(x - 20) = P_2\,(40 - x) \quad \Rightarrow \quad 40q\,(x - 20) = 10q\,(40 - x).$$

4. Решаем. Вес единицы длины q сокращается:

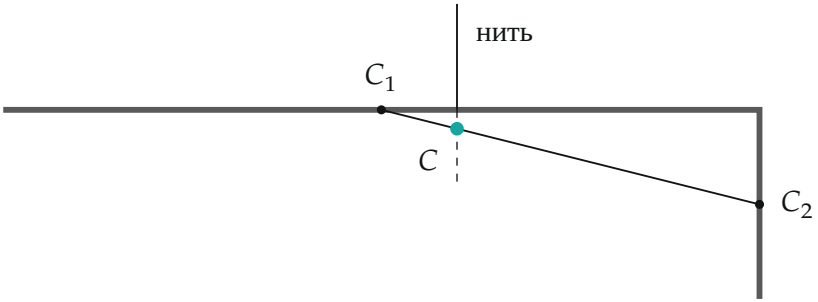
$$4x - 80 = 40 - x \quad \Rightarrow \quad 5x = 120 \quad \Rightarrow \quad x = 24 \text{ см}.$$

Отметка 24 лежит между 20 и 40, как и предполагалось в шаге 3: точка подвеса действительно находится правее середины длинной части и левее сгиба.

5. Второй способ: центр масс. Равновесие на нити означает, что центр масс C всей линейки лежит на вертикали, проходящей через точку подвеса. Поместим начало координат в отметку 0, ось x вправо, ось y вверх. Центр масс длинной части $C_1(20;\,0)$, короткой $C_2(40;\,-5)$. Центр масс системы — среднее с весами:

$$x_C = \frac{40q \cdot 20 + 10q \cdot 40}{50q} = 24 \text{ см},$$
$$y_C = \frac{40q \cdot 0 + 10q \cdot (-5)}{50q} = -1 \text{ см}.$$

Вертикаль через C пересекает длинный участок на отметке $x_C = 24$ — то же значение.



Центр масс C лежит на отрезке C_1C_2 и делит его в отношении, обратном весам: $C_1C : CC_2 = 10q : 40q = 1 : 4$. Вертикаль через C — линия нити, она встречает линейку на отметке 24. Масштаб: 0,25 см на 1 см линейки.

Обратите внимание. Плечо силы $\vec{P}_2$ берём до вертикали короткого участка (отметка 40), а не до его конца и не до его середины: горизонтальное расстояние одинаково для всех точек вертикального участка. Другая ловушка — считать вес приложенным в середине всей линейки (в отметке 25): после сгиба линейка перестала быть прямой, и её центр масс сместился.

Проверка. Подставим: слева $40q \cdot (24 - 20) = 160q$, справа $10q \cdot (40 - 24) = 160q$ — моменты равны. Предельные случаи: без короткой части ($P_2 \to 0$) формула даёт $x = \dfrac{20P_1 + 40P_2}{P_1 + P_2} \to 20$ — середину длинного участка; при равных весах частей точка подвеса оказалась бы посередине между их серединами, на отметке 30. Здесь короткая часть вчетверо легче длинной, поэтому $x = 24$ вчетверо ближе к 20, чем к 40: расстояния 4 и 16 см — в отношении $1 : 4$, обратном отношению весов.

Физический смысл: нить закрепляют на вертикали с центром масс; он смещён от середины длинного участка вправо и вниз — в сторону отогнутой части.

Ответ. Нить нужно закрепить на отметке 24 см (на 4 см правее середины длинного участка и на 16 см левее сгиба).