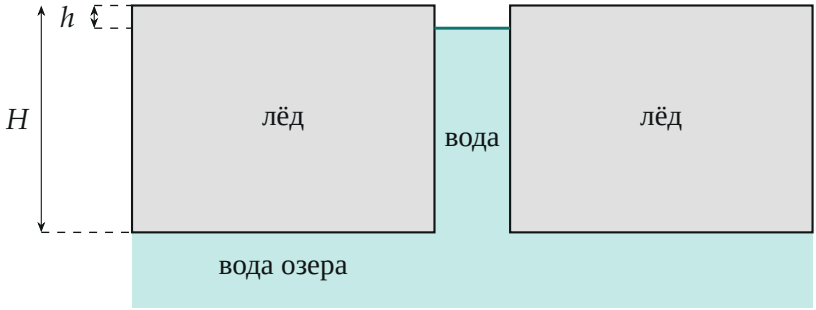
Лунка во льду

Задача 3. [МОШ 2010/11, 8 класс, 1-й тур, задача 3] Однажды зимой рыболов пробурил лунку во льду на поверхности озера и обнаружил, что вода в лунке находится на глубине $h = 18$ см, если отсчитывать от поверхности льда на озере. Расстояние от лунки до ближайшей точки берега озера во много раз больше, чем толщина слоя льда и радиус лунки. Вычислите толщину H слоя льда, считая её одинаковой на всей поверхности озера. Плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда равна $\rho_л = 900$ кг/м^3. Массой снега, рыболова и всех других объектов на поверхности озера пренебречь.

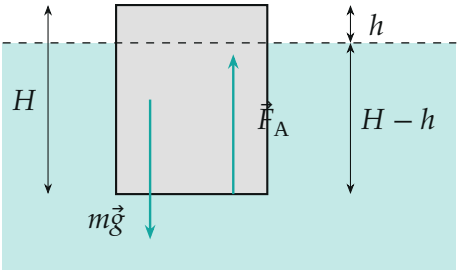


Поясняющий рисунок: разрез льда у лунки. H — толщина льда, h — глубина уровня воды в лунке от верхней поверхности льда. Лунка нарисована много шире настоящей, отношение $H : h$ взято из ответа.

▲ **Решение. Что происходит.** Лёд вокруг лунки — огромная плавающая плита: берег далеко, и лёд ни за что не держится, его вес целиком уравновешивает выталкивающая сила воды. Вода в лунке соединена с озером под льдом, поэтому её уровень совпадает с уровнем воды в озере (сообщающиеся сосуды). Значит, подо льдом лежит слой воды, начиная с уровня h ниже поверхности льда: глубина погружения льда равна $H - h$. Главная идея — записать условие плавания для столба льда с основанием S.

Обозначения. S — площадь основания выделенного столба льда (любая), H — толщина льда, $h = 18$ см — расстояние от верхней поверхности льда до уровня воды, $H - h$ — глубина погружения льда в воду.

1. Что берём в систему. Вертикальный столб льда с основанием S (вдали от лунки и берега). На него действуют сила тяжести вниз и сила давления воды на нижнее основание вверх. Боковые силы давления воды и соседнего льда на столб взаимно уравновешены и по вертикали не работают.



Столб льда с основанием S: вес $m\vec{g}$ вниз и сила давления воды на основание $\vec{F}_A$ вверх (сдвинуты вбок для наглядности, на деле обе действуют на одной вертикали). Пунктир — уровень воды.

2. Сила тяжести. Масса столба $m = \rho_л SH$, поэтому

$$mg = \rho_л g\, S\, H.$$

3. Сила Архимеда. Под водой находится часть столба высотой $H - h$ — вытесненная вода занимает объём $S(H - h)$, значит,

$$F_A = \rho_в g\, S\, (H - h).$$

Атмосферное давление действует на верхнюю грань льда и на поверхность воды одинаково и в итоговую силу не входит.

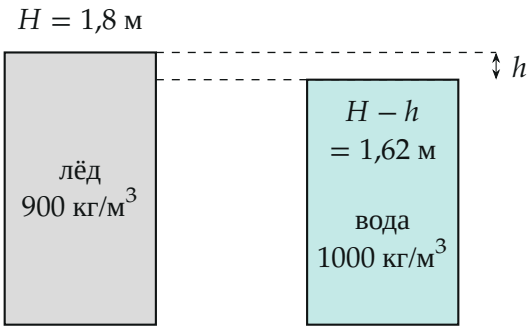
4. Условие плавания. Лёд покоится: силы равны.

$$\rho_л g\, S\, H = \rho_в g\, S\, (H - h) \quad \Rightarrow \quad \rho_л H = \rho_в H - \rho_в h \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\rho_в\, h}{\rho_в - \rho_л}.$$

Площадь S и g сократились: ответ не зависит от выбранного столба.

5. Число.

$$H = \frac{1000 \cdot 18}{1000 - 900}\ \text{см} = 180\ \text{см} = 1{,}8\ \text{м}.$$



масса на 1 м^2 основания: $900 \cdot 1{,}8 = 1000 \cdot 1{,}62 = 1620$ кг

Столб льда и столб воды вытесненного объёма имеют одинаковое основание и одинаковую массу. Столб воды ниже на $h = 0{,}18$ м: именно эта разница высот — часть льда над водой.

Обратите внимание. h — это часть льда *над* водой, а под водой остаётся $H-h$. Если принять h за подводную часть, выйдет $H = \rho_в h/\rho_л = 20$ см — такой лёд почти целиком выше воды, а лёд плотностью 0,9 от плотности воды обязан быть погружён на 9/10 толщины.

Проверка. Размерность: отношение плотностей безразмерно, H имеет размерность h — длины. Долю льда над водой даёт $h/H = \dfrac{\rho_в - \rho_л}{\rho_в} = 0{,}1$: над водой 10% толщины, под водой 90% — так и должно быть для льда плотностью 0,9 плотности воды: 18 см из 180 см. Предел: при $\rho_л \to \rho_в$ лёд почти заподлицо с водой ($h \to 0$) и при заданном h его толщина росла бы неограниченно — формула $H \to \infty$ именно это и говорит.

Физический смысл: толщину льда можно измерить, не пробивая его насквозь: достаточно знать, на сколько уровень воды в лунке ниже поверхности льда, — лёд плавает на 9/10 своей толщины.

Ответ. $H = \dfrac{\rho_в h}{\rho_в - \rho_л} = 1{,}8$ м.