Палочка, брусок и сосуд с водой

Задача 5. [МОШ 2010/11, 8 класс, 2-й тур, задача 1] Деревянная палочка AB длиной $l = 1$ м и массой $M = 0{,}25$ кг подвешена в точке O, которая находится на одной трети длины палочки от точки A (см. рис.). К правому концу палочки в точке B подвешен медный брусок массой $m_1 = 1$ кг, причем палочка на одну треть своей длины, считая от точки B, погружена в сосуд с водой. К левому концу палочки в точке A подвешен другой груз массой m_2. Чему равна масса этого второго груза, если система находится в равновесии? Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность меди $\rho_м = 8900$ кг/м^3, плотность дерева $\rho_{дер} = 400$ кг/м^3.

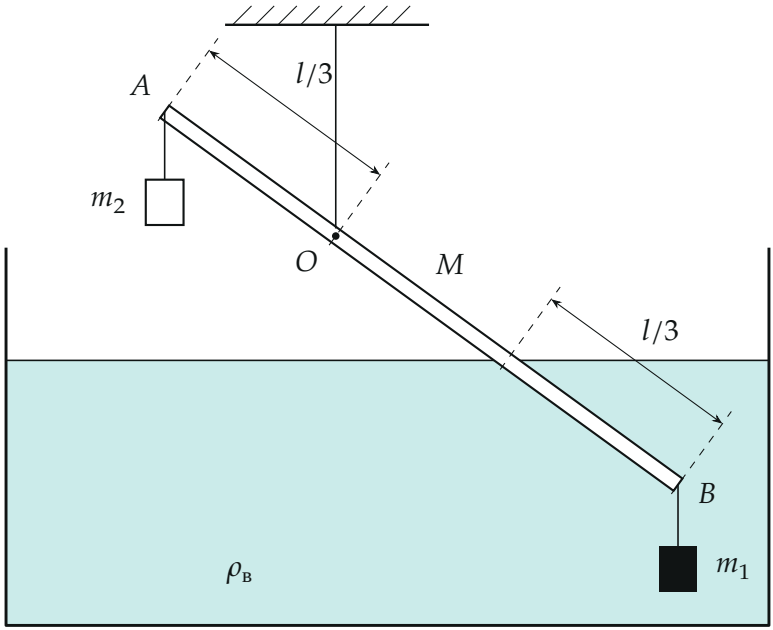
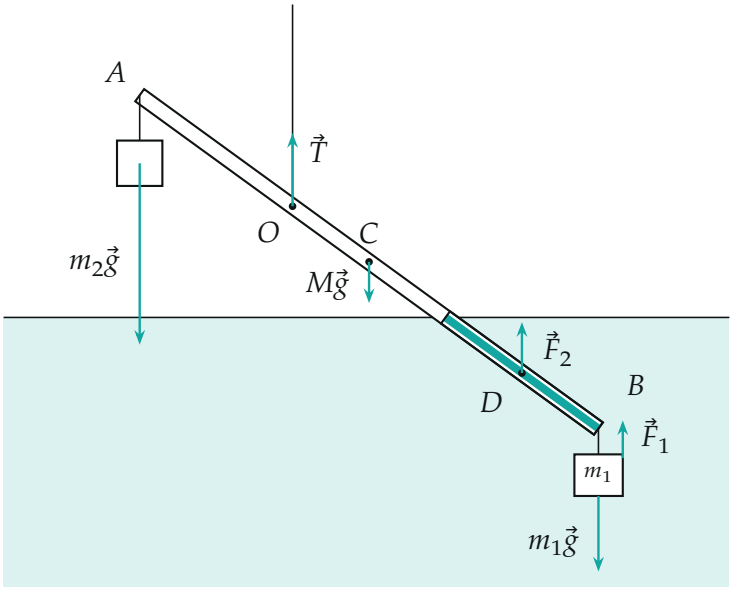


Рисунок условия: палочка AB подвешена на нити в точке O ($AO = l/3$); нижняя треть палочки $l/3$ (от B) в воде; на конце A висит груз m_2, на конце B под водой — медный брусок m_1.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Палочка с грузами — рычаг, он покоится, значит, сумма моментов всех сил относительно оси O равна нулю.

Все силы вертикальны: силы тяжести и силы Архимеда. Силы Архимеда уменьшают момент справа: они действуют на брусок и на погружённую часть палочки. Главная идея — записать правило моментов относительно точки O, правильно найдя точки приложения и плечи всех пяти сил: $m_2 g$, Mg и $m_1 g$ направлены вниз, а две силы Архимеда — вверх.

Обозначения. α — угол наклона палочки к горизонту (по условию задачи он не нужен), F_1 — сила Архимеда на брусок, F_2 — сила Архимеда на погружённую часть палочки, C — середина палочки, D — середина её погружённой части. Расстояния вдоль палочки от точки A: $AO = l/3$, $AC = l/2$, $AD = l - l/6 = 5l/6$, $AB = l$.



Силы, действующие на систему палочка + грузы. Бирюзовая толстая линия — погружённая часть палочки ($l/3$ от B). Длины стрелок условны: чтобы силы были заметны, малые показаны не в масштабе.

1. Сила Архимеда на брусок. Брусок целиком в воде, его объём $V_1 = m_1/\rho_м$, поэтому

$$F_1 = \rho_в g V_1 = \rho_в g \frac{m_1}{\rho_м}.$$

Вместе с силой тяжести $m_1 g$ она даёт силу на конец B, равную $m_1 g\left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_м}\right)$ вниз: вода «облегчает» брусок.

2. Сила Архимеда на палочку. Объём палочки $V = M/\rho_{дер}$ — палочка однородная, поэтому погружённая треть имеет объём $V/3$:

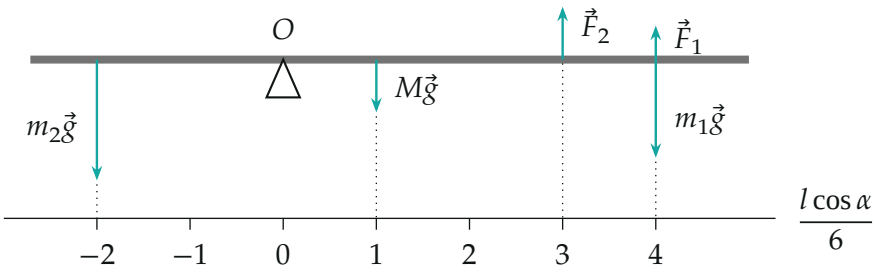
$$F_2 = \rho_в g \frac{V}{3} = \frac{\rho_в}{\rho_{дер}} \cdot \frac{Mg}{3}.$$

Приложена она в центре объёма погружённой части — в её середине, в точке D на расстоянии $l/6$ от B.

3. Плечи. Все силы вертикальны, плечо вертикальной силы относительно O — расстояние по горизонтали от линии действия силы до O. Оно равно расстоянию вдоль палочки, умноженному на $\cos\alpha$. Этот множитель одинаков у всех сил и сократится, поэтому считаем расстояния вдоль палочки:

сила	$m_2 g$	Mg	F_2	$m_1 g$	F_1
расстояние до O	$\dfrac{l}{3}$	$\dfrac{l}{6}$	$\dfrac{l}{2}$	$\dfrac{2l}{3}$	$\dfrac{2l}{3}$

Сила $m_2 g$ — слева от O и вращает палочку против часовой стрелки, остальные — справа: вес палочки и брусок вращают по часовой, архимедовы силы F_1, F_2 — против.



Эквивалентная схема рычага. Линейка внизу — расстояния по горизонтали от O в единицах $l\cos\alpha/6$: $m_2 g$ действует на расстоянии 2 слева, Mg — 1 справа, F_2 — 3, брусок и F_1 — 4 справа.

4. Правило моментов. Сумма моментов относительно O равна нулю: момент $m_2 g$ против часовой стрелки равен сумме моментов остальных сил (с учётом знаков):

$$m_2 g \cdot \frac{l}{3} + F_2 \cdot \frac{l}{2} + F_1 \cdot \frac{2l}{3} = Mg \cdot \frac{l}{6} + m_1 g \cdot \frac{2l}{3}.$$

5. Подставим силы. Сократим g и умножим всё на $3/l$:

$$m_2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{дер}} \cdot \frac{M}{3} + 2m_1 \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{м}} = \frac{M}{2} + 2m_1,$$

$$m_2 = 2m_1\Big(1 - \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{м}}\Big) - \frac{M}{2}\Big(\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{дер}} - 1\Big).$$

6. Число.

$$m_2 = 2\Big(1 - \frac{1000}{8900}\Big) - \frac{0{,}25}{2}\Big(\frac{1000}{400} - 1\Big)$$
$$= 1{,}775 - 0{,}1875 \approx 1{,}59 \text{ кг} \approx 1{,}6 \text{ кг}.$$

Обратите внимание. Брусок тоже находится в воде — его выталкивающая сила учтена; а сила Архимеда на палочку приложена к *середине погружённой части*, а не к середине палочки. Угол наклона палочки не нужен: плечи пропорциональны длинам вдоль палочки, и $\cos\alpha$ сокращается.

Проверка. Размерность: слагаемые — массы. Предельный случай: если воды нет ($\rho_\text{в} \to 0$), формула даёт $m_2 = 2m_1 + M/2 = 2{,}125$ кг — груз уравновешивает брусок с плечом вдвое длиннее и половину палочки; вода уменьшает нужную массу на 0,225 кг из-за бруска и на 0,3125 кг из-за палочки, итого $2{,}125 - 0{,}537 = 1{,}59$ кг. Знак верный: выталкивающие силы направлены вверх и действуют справа, значит, груз слева нужен меньший, чем в воздухе.

Физический смысл: сила Архимеда справа «облегчает» правую часть, и чтобы уравновесить её, слева нужен груз меньшей массы.

Ответ. $m_2 = 2m_1\Big(1 - \frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{м}}\Big) - \frac{M}{2}\Big(\frac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{дер}} - 1\Big) \approx 1{,}6$ кг.