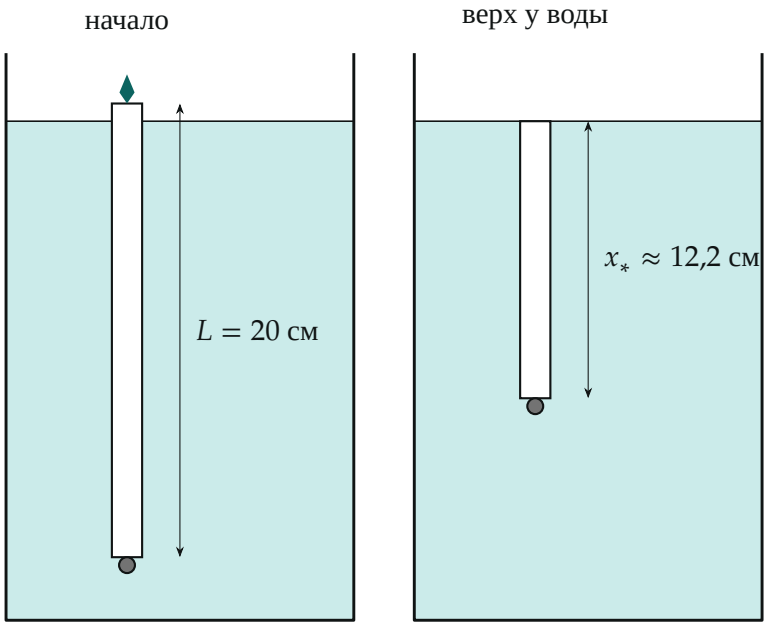
Горящая свеча с шариком

Задача 6. [МОШ 2010/11, 8 класс, 2-й тур, задача 2] Парафиновая свеча имеет цилиндрическую форму с площадью поперечного сечения $S = 1$ см^2. Длина свечи $L = 20$ см. Если такая свеча горит на подсвечнике, то время её горения $T = 3$ часа. На одном конце такой свечи подожгли фитиль, а к другому её концу прилепили стальной шарик диаметром $D = 7$ мм. Свечу опустили в воду, и она, горя, некоторое время плавала в вертикальном положении, не касаясь дна сосуда. Сколько часов она горела? Плотность парафина $\rho_п = 0{,}9$ г/см^3, плотность стали $\rho_с = 7{,}8$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1{,}0$ г/см^3. Объем шара радиусом R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.



Поясняющий рисунок. Свеча с шариком плавает вертикально, шарик — внизу. Слева — начало: свеча длиной L чуть выступает над водой, фитиль горит. Справа — момент, когда сгоревшая свеча стала короче до x_* и её верхний торец оказался на уровне воды. Ширина свечи и размер шарика условны.

▲ **Решение. Что происходит.** Свеча плавает, потому что шарик тяжёлый, но весь комплекс — свеча с шариком — легче воды лишь пока све-

ча длинная: парафин легче воды, а сталь тяжелее. Свеча сгорает сверху, шарик остаётся тем же, поэтому средняя плотность комплекса растёт. Когда она сравняется с плотностью воды, свеча уходит под воду целиком: фитиль залит, она гаснет и тонет. Главная идея — найти длину свечи x_* в этот момент, а потом по скорости сгорания — время.

Обозначения. x — текущая длина свечи, x_* — её длина в момент полного погружения, $V_ш = \dfrac{\pi D^3}{6}$ — объём шарика, $u = L/T$ — скорость сгорания (длина, сгорающая за единицу времени); считаем её одинаковой на подсвечнике и в воде.

1. Объём шарика. $D = 7$ мм $= 0{,}7$ см, радиус $R = D/2$:

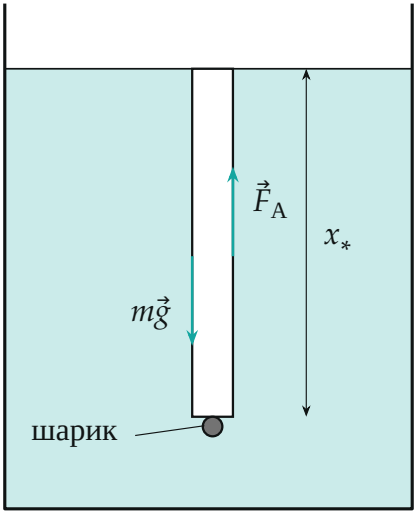
$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi \cdot 0{,}7^3}{6} \approx 0{,}180 \text{ см}^3.$$

2. Условие плавания при полном погружении. В момент, когда верхний торец свечи на уровне воды, комплекс вытесняет воду объёмом $Sx_* + V_ш$, и сила Архимеда ровно равна силе тяжести комплекса: масса свечи $\rho_п S x_*$, масса шарика $\rho_с V_ш$.

$$(\rho_п S x_* + \rho_с V_ш)\, g = \rho_в\, g\, (S x_* + V_ш).$$

Сократим g и соберём x_* в одной части:

$$S x_* (\rho_в - \rho_п) = V_ш (\rho_с - \rho_в) \quad \Rightarrow \quad x_* = \frac{V_ш}{S} \cdot \frac{\rho_с - \rho_в}{\rho_в - \rho_п}.$$



Момент полного погружения: верх свечи на уровне воды, сила Архимеда $\vec{F}_A$ и сила тяжести $m\vec{g}$ комплекса равны по модулю. Стрелки сдвинуты вбок для наглядности.

3. Число. Подставим в сантиметрах (плотности в г/см^3):

$$x_* = \frac{0{,}180}{1} \cdot \frac{7{,}8 - 1{,}0}{1{,}0 - 0{,}9}\ \text{см} = 0{,}180 \cdot 68\ \text{см} \approx 12{,}2\ \text{см}.$$

Значит, свеча плавает, пока не сгорит с 20 см до 12,2 см: сгорело $L - x_* \approx 7{,}79$ см.

4. Время горения. Свеча равномерно сгорает по $u = L/T$, поэтому время горения пропорционально сгоревшей длине:

$$t = \frac{L - x_*}{u} = T\,\frac{L - x_*}{L} = T\Big(1 - \frac{x_*}{L}\Big) = 3\Big(1 - \frac{12{,}2}{20}\Big)\ \text{ч} \approx 1{,}17\ \text{ч}.$$

В общем виде

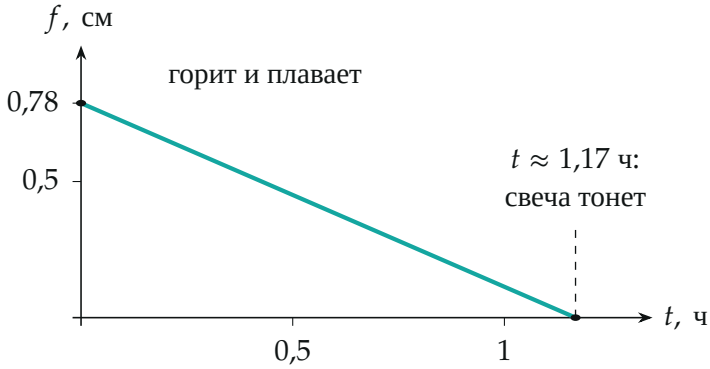
$$t = T\Big(1 - \frac{\pi D^3}{6SL} \cdot \frac{\rho_\text{с} - \rho_\text{в}}{\rho_\text{в} - \rho_\text{п}}\Big).$$

5. Проверка того, что свеча вначале плавала. Пока свеча частично над водой, силы уравновешены при глубине погружения свечи d: $\rho_\text{в}(Sd +$

$V_ш) = \rho_п S x + \rho_с V_ш$. Высота выступающей части $f = x - d$:

$$f = x\,\frac{\rho_в - \rho_п}{\rho_в} - \frac{V_ш(\rho_с - \rho_в)}{S\rho_в} = 0{,}1\,x - 1{,}22 \text{ см}.$$

При $x = L = 20$ см выступает $f \approx 0{,}78$ см — свеча вначале плавает, как сказано в условии. Так как $x = L - ut$, получаем $f = 0{,}78 - 0{,}667\,t$ (см; t в часах): выступающая часть линейно убывает до нуля при $t \approx 1{,}17$ ч.



Высота f выступающей над водой части свечи в зависимости от времени горения: линия опускается и пересекает нуль в момент, когда свеча погасает и тонет.

Обратите внимание. Время пропорционально сгоревшей *длине*: парафин горит с постоянной скоростью по длине. И шарик нельзя считать пренебрежимо малым: каждый его кубический сантиметр удерживается на плаву только $\dfrac{\rho_с - \rho_в}{\rho_в - \rho_п} = 68$ кубическими сантиметрами парафина.

Проверка. Размерность: $V_ш/S$ — длина, отношение плотностей безразмерно, t — в единицах T. Предел: $\rho_с \to \rho_в$ (шарик почти невесом в воде) даёт $x_* \to 0$, $t \to T$ — свеча сгорает полностью; число 1,17 ч лежит между 0 и $T = 3$ ч.

Физический смысл: сгорая, свеча теряет плавучесть и в какой-то момент перестаёт держать шарик.

Ответ. $t = T\left(1 - \dfrac{\pi D^3}{6SL} \cdot \dfrac{\rho_с - \rho_в}{\rho_в - \rho_п}\right) \approx 1{,}17$ ч (около 1 ч 10 мин).