Камень с обрыва

Задача 1. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 1] Находясь на краю глубокого обрыва, турист бросает камень вертикально вверх. При последующем движении вниз камень проходит точку бросания и падает в обрыв. Известно, что за промежуток времени $t = 1$ с, отсчитываемый от момента броска, камень прошёл путь $S = 2{,}9$ м. Определите начальную скорость камня, сообщённую ему при броске. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

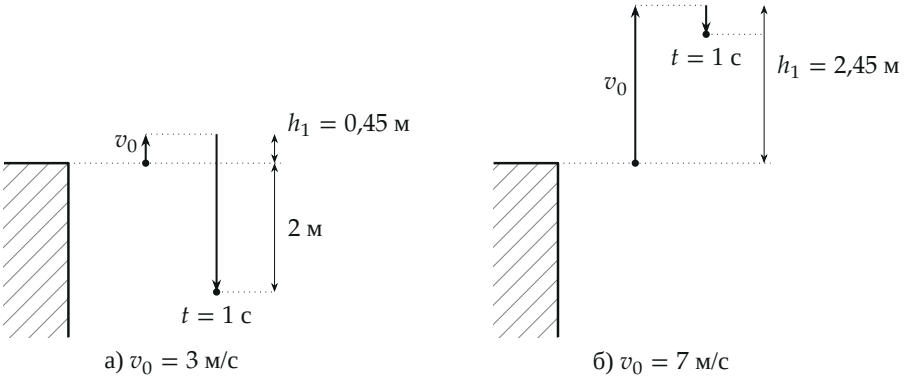


Рис. 1. Два способа пройти за 1 с путь 2,9 м (путь вверх и путь вниз сдвинуты вбок, чтобы их было видно). а) Подъём короткий, спуск длинный: к концу секунды камень ниже точки броска на 2 м. б) Подъём длинный, спуск короткий: камень ещё на 2 м выше точки броска и пройдёт её позже

▲ **Решение. Что происходит.** Камень летит с постоянным ускорением g, направленным вниз: сначала тормозится вверх до точки поворота, потом разгоняется вниз. Спрашивают про *путь*, а не про перемещение. Путь — длина пройденной траектории, он только растёт, поэтому за $t = 1$ с он складывается из подъёма и спуска. Это задача на равноускоренное движение по вертикали; весь ход решения — разбить время на подъём и спуск и сложить пути.

Обозначения. v_0 — начальная скорость (вертикально вверх), t_1 — время подъёма до точки поворота, $t_2 = t - t_1$ — время спуска после неё до конца секунды, h_1 и h_2 — путь вверх и путь вниз.

1. Камень не мог лететь всё время вверх. Допустим, что за 1 с он ни разу не остановился. Тогда путь равен перемещению: $S = v_0 t - gt^2/2$, откуда $v_0 = S/t + gt/2 = 2{,}9 + 5 = 7{,}9$ м/с. Но с такой скоростью камень остановился бы через $v_0/g = 0{,}79$ с, то есть раньше, чем через 1 с, — противоречие. Значит, точка поворота в первую секунду есть: $t_1 < t$.

2. Подъём. Ось y вертикально вверх, начало в точке броска. Скорость $v_y = v_0 - gt$; в точке поворота $v_y = 0$, поэтому $t_1 = v_0/g$. Путь вверх при торможении до остановки: $h_1 = v_0^2/(2g) = gt_1^2/2$.

3. Спуск. После поворота камень стартует вниз с нулевой скоростью и ускорением g: путь вниз $h_2 = gt_2^2/2$, где $t_2 = t - t_1$.

4. Сумма путей. Путь за секунду — сумма двух кусков траектории:

$$S = h_1 + h_2 = \frac{g}{2}\left(t_1^2 + t_2^2\right), \qquad t_1 + t_2 = t.$$

Из $(t_1 + t_2)^2 = t^2$ находим произведение: $t_1 t_2 = \dfrac{1}{2}\left(t^2 - \dfrac{2S}{g}\right) = \dfrac{1}{2}(1 - 0{,}58) = 0{,}21$ с^2. По теореме Виета t_1 и t_2 — корни уравнения $x^2 - tx + 0{,}21 = 0$, то есть

$$x = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} - 0{,}21} = 0{,}5 \pm 0{,}2 \text{ с}.$$

Время подъёма — любой из двух корней (формула для S симметрична по t_1 и t_2): $t_1 = 0{,}3$ с или $t_1 = 0{,}7$ с. Оба меньше $t = 1$ с, значит оба годятся.

5. Начальная скорость.

$$v_0 = gt_1 = g\left(\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{S}{g} - \frac{t^2}{4}}\right) \quad \Rightarrow \quad v_0 = 3 \text{ м/с или } 7 \text{ м/с}.$$

Оба случая показаны на рис. 1: подъём 0,45 м и спуск 2,45 м; или подъём 2,45 м и спуск 0,45 м — в сумме по 2,9 м.

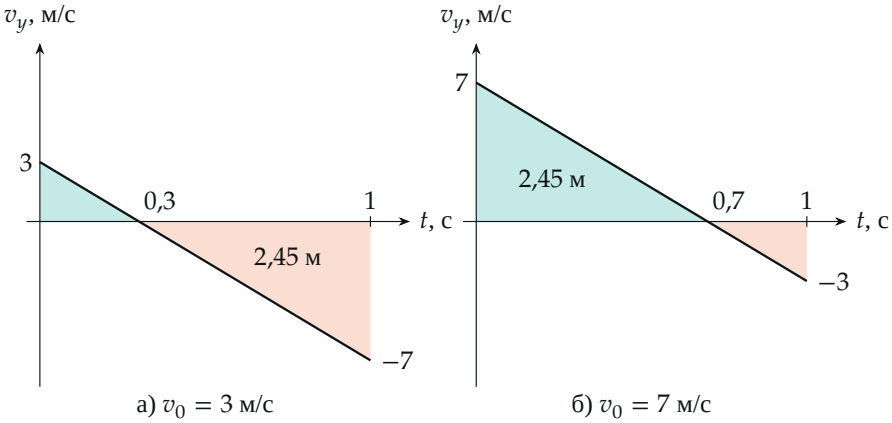


Рис. 2. Скорость v_y (вверх положительна) в обоих случаях. Путь на каждом участке — площадь под графиком: бирюзовая — подъём, красная — спуск; площади подъёма и спуска: а) 0,45 + 2,45 м, б) 2,45 + 0,45 м — в сумме 2,9 м

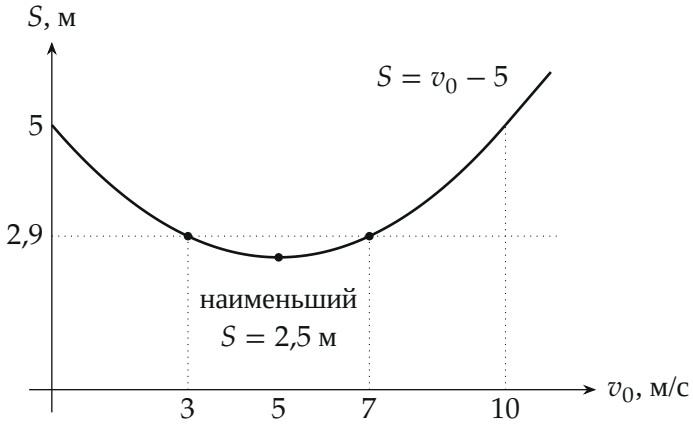


Рис. 3. Путь за первую секунду как функция начальной скорости: $S = 0{,}1\,v_0^2 - v_0 + 5$ при $v_0 \le 10$ м/с (с точкой поворота) и $S = v_0 - 5$ при $v_0 \ge 10$ м/с (без неё). Уровень $S = 2{,}9$ м пересекает кривую дважды

Обратите внимание.

- Путь и перемещение здесь разные величины: в варианте а) перемещение к концу секунды −2 м (камень ниже точки броска), в варианте б) +2 м, а путь одинаков.

- Условие «проходит точку бросания» относится ко всему дальнейшему полёту, а не к первой секунде: при $v_0 = 7$ м/с камень проходит её на пути вниз через $2v_0/g = 1{,}4$ с.

Проверка. Подставим: $v_0 = 3$ м/с: подъём $9/20 = 0{,}45$ м за 0,3 с, спуск за оставшиеся 0,7 с: $5 \cdot 0{,}49 = 2{,}45$ м, итого 2,9 м. $v_0 = 7$ м/с: подъём $49/20 = 2{,}45$ м за 0,7 с, спуск за 0,3 с: 0,45 м, итого 2,9 м. Размерность v_0: $g\,t$ и $g\sqrt{S/g}$ — м/с. Второй способ — график на рис. 3: за секунду при любой v_0 камень проходит не меньше 2,5 м (при $v_0 = 5$ м/с: подъём и спуск по 0,5 с, пути $1{,}25 + 1{,}25$), а $2{,}9 > 2{,}5$, поэтому решений ровно два (при $v_0 > 10$ м/с поворота нет и $S = v_0 - 5 > 5$ м). Смысл: один и тот же путь за секунду можно набрать, подняв камень невысоко и уронив глубоко, или наоборот.

Ответ. $v_0 = g\left(\dfrac{t}{2} \pm \sqrt{\dfrac{S}{g} - \dfrac{t^2}{4}}\right)$, то есть $v_0 = 3$ м/с или $v_0 = 7$ м/с.