Шайба на нити на наклонной плоскости

Задача 2. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 2] На наклонной плоской поверхности, составляющей угол $\alpha = 60°$ с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой $m = 0{,}5$ кг, прикреплённая лёгкой нитью длиной $L = 1$ м к точке на этой поверхности. Шайбу толкнули вдоль поверхности так, что нить натянута и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет направленную горизонтально скорость $V = 2$ м/с. Коэффициент трения шайбы о плоскость равен $\mu = 0{,}6$. Каково по модулю ускорение a шайбы в этот момент времени? Какова сила натяжения F нити в этот момент? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

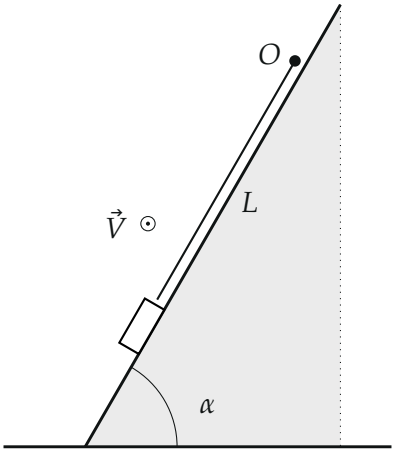


Рис. 1. Вид сбоку на сечение склона вертикальной плоскостью, в которой лежит нить. Скорость шайбы горизонтальна, то есть перпендикулярна этой плоскости (направлена на нас, значок «точка в кружке»), и перпендикулярна нити

▲ **Решение. Что происходит.** Шайба скользит по склону и одновременно движется по дуге окружности радиуса L вокруг точки закрепления O. Ускорение при таком движении имеет две составляющие: *нормальную* (вдоль нити, к центру O), которая меняет направление скорости, и *касательную* (вдоль скорости), которая меняет её модуль. Нормальную

создают нить и составляющая силы тяжести вдоль склона, касательную — только сила трения. Это динамика движения по окружности с трением; ключевой закон — второй закон Ньютона в проекциях на оси вдоль нити и вдоль скорости.

Обозначения. a_τ — касательная составляющая ускорения (вдоль скорости), a_n — нормальная (к точке O), N — сила реакции склона, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, F — сила натяжения нити.

1. Где находится шайба. Скорость горизонтальна и перпендикулярна нити, а нить лежит на склоне. Горизонтальное направление на склоне перпендикулярно линии наибольшего ската, значит, нить лежит вдоль линии ската: шайба либо точно выше O, либо точно ниже O. Выше она быть не может (п. 4), поэтому далее шайба *ниже* точки O, нить идёт от шайбы вверх по склону (рис. 1).

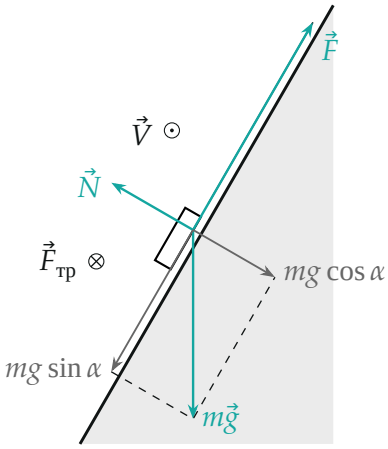


Рис. 2. Силы, действующие на шайбу (вид сбоку, в плоскости нити): тяжесть $m\vec{g}$ с составляющими вдоль и поперёк склона (штриховой параллелограмм), реакция $\vec{N}$, натяжение $\vec{F}$ вдоль нити. Сила трения $\vec{F}_{тр}$ направлена против скорости, то есть от нас (значок «крестик в кружке»), и в этой плоскости не видна

2. Оси и второй закон Ньютона. Запишем закон для шайбы векторно: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{\text{тр}}$. Возьмём три оси (рис. 3,а): τ — по скорости (горизонтально вдоль склона), n — вдоль нити от шайбы к O (вверх по

склону), и ось перпендикулярно склону. Все четыре силы раскладываем по осям (тяжесть — на составляющие $mg\sin\alpha$ вниз вдоль склона и $mg\cos\alpha$ вглубь склона):

перпендикулярно склону (шайба с него не уходит): $0 = N - mg\cos\alpha$, значит $N = mg\cos\alpha$;

по τ: нить и составляющая $mg\sin\alpha$ лежат вдоль линии ската, перпендикулярной τ, их проекции равны нулю; остаётся трение, оно направлено против скорости:

$$ma_\tau = -F_{\text{тр}}, \qquad F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

поэтому $|a_\tau| = \mu g\cos\alpha = 0{,}6\cdot 10\cdot 0{,}5 = 3$ м/с^2 (шайба тормозится: знак минус);

по n: сюда входят нить (вверх по склону, к O) и $mg\sin\alpha$ (вниз по склону, от O):

$$ma_n = F - mg\sin\alpha.$$

3. Нормальное ускорение и сила натяжения. В выбранный момент скорость перпендикулярна нити, а длина нити не меняется, поэтому шайба в этот момент движется по окружности радиуса L вокруг O со скоростью V и её нормальное ускорение — центростремительное: $a_n = V^2/L = 4$ м/с^2. Подставляем в уравнение по n:

$$F = \frac{mV^2}{L} + mg\sin\alpha = 0{,}5\cdot 4 + 0{,}5\cdot 10\cdot 0{,}866 = 2 + 4{,}33 \approx 6{,}33 \text{ Н}.$$

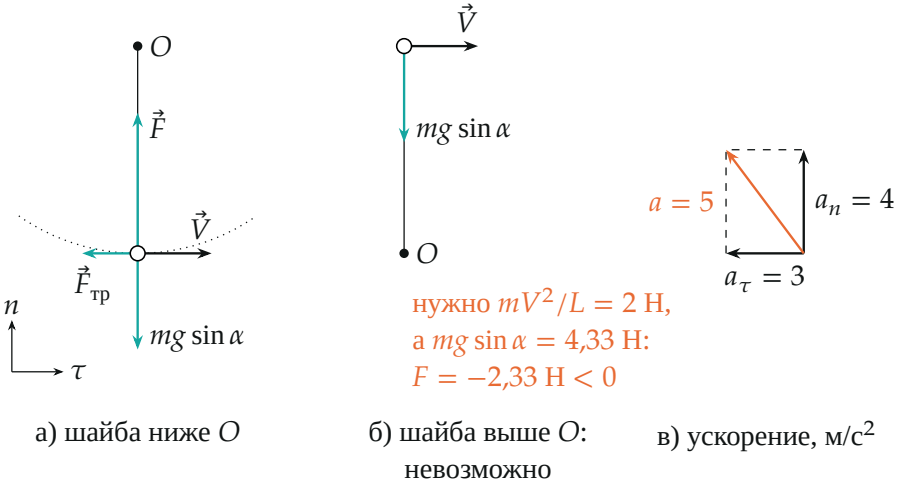
Нить тянет шайбу вверх по склону и должна и удерживать её от скатывания вниз, и сообщить центростремительное ускорение.

4. Почему шайба не выше точки O**.** Допустим, что она выше O (рис. 3,б). Тогда $mg\sin\alpha$ направлена по склону вниз, то есть тоже к O, и уравнение по n примет вид $ma_n = F + mg\sin\alpha$. Отсюда $F = mV^2/L - mg\sin\alpha = 2 - 4{,}33 = -2{,}33$ Н < 0, а нить толкать шайбу не может. Значит, верхнего положения не бывает, и в этот момент шайба ниже O.

5. Полное ускорение. Составляющие a_n и a_τ перпендикулярны

(рис. 3,в), поэтому

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{L}\right)^2 + (\mu g \cos\alpha)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м/с}^2.$$



а) шайба ниже O

б) шайба выше O: невозможно

в) ускорение, м/с^2

Рис. 3. Вид на склон перпендикулярно ему (вверх по рисунку — вверх по склону, вправо — горизонтальное направление скорости). а) Силы вдоль осей: натяжение $F = 6{,}33$ Н и $mg \sin\alpha = 4{,}33$ Н вдоль нити, трение — по оси скорости. б) Верхнее положение требует отрицательного натяжения. в) Сложение ускорений a_n и a_τ

Обратите внимание.

- Скорость шайбы падает (трение), поэтому полное ускорение не равно центростремительному V^2/L: добавляется касательная часть $\mu g \cos\alpha$.
- Сила трения скольжения направлена против *скорости*, а не вдоль нити, и равна μN при $N = mg \cos\alpha$: давление на склон создаёт только составляющая тяжести поперёк склона, нить его не меняет (нить лежит в плоскости склона).

Проверка. Размерность: V^2/L и $\mu g \cos\alpha$ — м/с^2; mV^2/L и $mg \sin\alpha$ — Н. Предельный случай $V = 0$: $a_n = 0$, $F = mg \sin\alpha$ — нить просто

держит шайбу на склоне. Второй способ для F: силы вдоль линии ската дают $F - mg\sin\alpha = 2$ Н, то есть $F - 4{,}33 = 2$ Н, $F = 6{,}33$ Н; для a: проекции на горизонталь и вдоль ската равны 3 и 4 м/с^2 — треугольник 3–4–5. Смысл: на склоне тяжесть тянет шайбу вниз вдоль ската, поэтому в нижней точке дуги нить натянута сильнее, чем в горизонтальном положении.

Ответ. $a = \sqrt{(V^2/L)^2 + (\mu g\cos\alpha)^2} = 5$ м/с^2; $\quad F = \dfrac{mV^2}{L} + mg\sin\alpha \approx 6{,}33$ Н.