Крышка на смеси воды и льда

Задача 3. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 3] В цилиндрическом сосуде высотой $h = 20$ см находится смесь воды и мелких кусочков льда (см. рис. 1). На поверхности плавает круглая стальная крышка толщиной $d = 2$ мм, нижний край которой находится точно на поверхности воды. Найдите среднюю плотность смеси воды и льда. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность стали $\rho_с = 7800$ кг/м^3. Трением льда о стенки сосуда пренебречь.

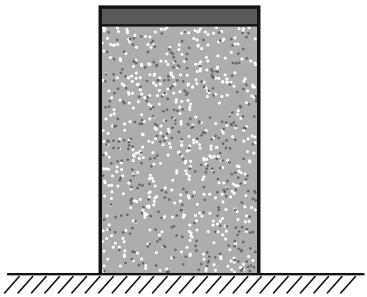


Рис. 1. Рисунок условия: сосуд со смесью воды и льда, сверху лежит стальная крышка

▲ **Решение. Что происходит.** Смесь неподвижна. Нижний край крышки — точно на уровне воды, поэтому крышка лежит не на воде, а на льдинках, и все льдинки целиком под водой (выше уровня воды места для них нет). Вода выталкивает каждую льдинку сильнее, чем её тянет вниз тяжесть, и этот избыток выталкивающей силы держит крышку. Значит, из равновесия льда (закон Архимеда) найдём объём льда, а по нему — среднюю плотность смеси. Это задача на гидростатику: закон Архимеда и условие равновесия; второй способ — давление на дно, посчитанное через воду и через вес всего содержимого.

Обозначения. S — площадь дна (и крышки), H — толщина слоя смеси от дна до нижнего края крышки, $V_л$ — суммарный объём льда, ρ — средняя плотность смеси (масса смеси, делённая на её объём SH), $m_к = \rho_с dS$ — масса крышки, $N_к$ — сила, с которой крышка и лёд давят

друг на друга, p — давление на дно (атмосферное сократится, считаем p избыточным).

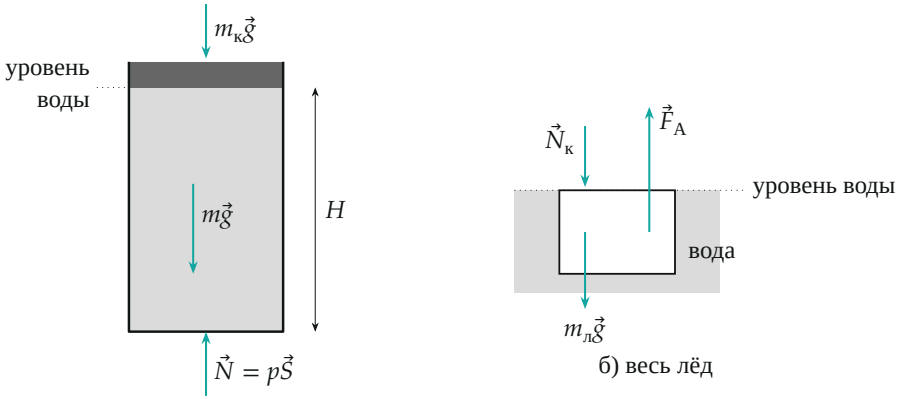


Рис. 2. а) Внешние силы на систему «смесь + крышка»: тяжесть крышки, тяжесть смеси и реакция дна $N = pS$ (стенки без трения вертикальной силы не дают; рисунок не в масштабе). б) Весь лёд (льдинки мысленно собраны вместе): он целиком под водой, вверх — сила Архимеда, вниз — тяжесть и давление крышки $N_к$

1. Равновесие крышки. На крышку действуют тяжесть $m_к g$ вниз и сила $N_к$ со стороны льдинок вверх; вода снизу на крышку избыточного давления не оказывает: её нижний край как раз на поверхности воды. Второй закон Ньютона для крышки в проекции на вертикаль: $N_к - m_к g = 0$, то есть $N_к = \rho_с dSg$. По третьему закону Ньютона крышка давит на лёд вниз с той же силой.

2. Равновесие льда. Возьмём весь лёд как одно тело (рис. 2,б). Он целиком под водой, поэтому сила Архимеда $F_A = \rho_в g V_л$. Стенки без трения вертикальной силы не дают, дна лёд не касается (его выталкивает вверх). Второй закон Ньютона для льда в проекции на вертикаль (ось вверх):

$$\rho_в g V_л - \rho_л g V_л - \rho_с dSg = 0 \quad \Rightarrow \quad V_л = \frac{\rho_с dS}{\rho_в - \rho_л}.$$

Каждая льдинка выталкивается сильнее, чем весит, — избыток $(\rho_в - \rho_л)gV_л$ и держит крышку.

3. Средняя плотность. Масса смеси — лёд плюс вода в остальном объёме $SH - V_л$:

$$\rho = \frac{\rho_л V_л + \rho_в(SH - V_л)}{SH} = \rho_в - (\rho_в - \rho_л)\frac{V_л}{SH} = \rho_в - \rho_с\frac{d}{H}.$$

Плотность льда в ответ не вошла: чем легче лёд, тем больше его нужно, чтобы удержать крышку, и средняя плотность выходит той же.

4. Второй способ: давление на дно. Вода — сплошная покоящаяся жидкость, её поверхность на уровне нижнего края крышки, поэтому избыточное давление на дне $p = \rho_в gH$ (лёд дна не касается и давление воды не меняет). С другой стороны, система «смесь + крышка» неподвижна (рис. 2,а): вверх реакция дна $N = pS$, вниз ρSHg и $m_к g$; второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$pS = \rho SHg + \rho_с dSg \quad \Rightarrow \quad p = \rho gH + \rho_с gd.$$

Приравняв $\rho_в gH = \rho gH + \rho_с gd$, получаем то же $\rho = \rho_в - \rho_с d/H$.

5. Числа. Слой смеси $H = h - d$ отличается от высоты сосуда h лишь на $d/h = 1\,\%$; берём $H \approx h$:

$$\rho = \rho_в - \rho_с\frac{d}{h} = 1000 - 7800 \cdot \frac{0{,}002}{0{,}2} = 1000 - 78 = 922 \text{ кг/м}^3.$$

(С $H = 19{,}8$ см вышло бы 921 кг/м^3 — различие меньше точности данных.)

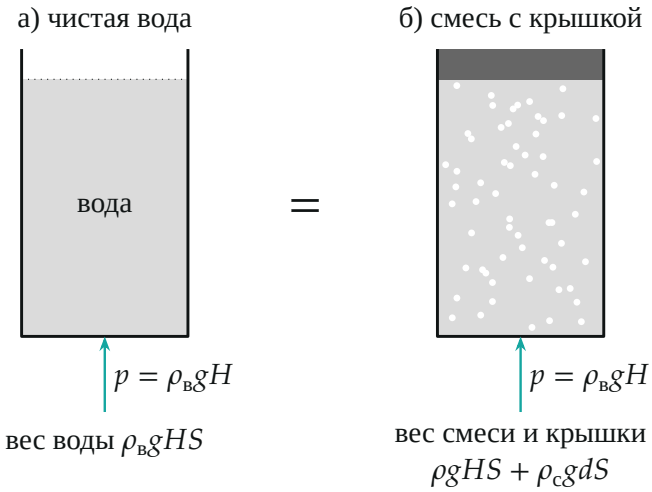


Рис. 3. Давление на дно одно и то же: чистой воды высотой H или смеси той же высоты с крышкой. Вес смеси с крышкой равен весу воды в том же объёме, потому что смесь легче воды ровно на столько, сколько весит крышка

Обратите внимание.

- Льдинки здесь не «просто плавают»: на каждую сила Архимеда действует *больше* её веса, разницу уравновешивает крышка. Условие $m_л g = F_A$ для отдельной льдинки неверно — в равновесие надо включить силу давления крышки.

Проверка. Размерность: $\rho_с d/h$ — кг/м^3. Смесь воды (1000) и льда (900) должна иметь среднюю плотность между 900 и 1000 кг/м^3: 922 лежит между. Долю льда по объёму найдём из $\rho = \varphi\rho_л + (1-\varphi)\rho_в$: $\varphi = (1000-922)/(1000-900) = 0{,}78$ — льда 78 % объёма, воды 22 %, разумно. Предел $d \to 0$: $\rho \to \rho_в$ — без крышки лёд всплыл бы выше воды, и под уровнем воды осталась бы одна вода. Смысл: крышка топит лёд до уровня воды, а масса крышки определяет, насколько смесь легче воды.

Ответ. $\rho = \rho_в - \rho_с \dfrac{d}{h} = 922$ кг/м^3.