Резисторы «треугольником»

Задача 4. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 4] Схема, состоящая из 3-х резисторов и 3-х клемм, соединённых по схеме «треугольник» (см. рис. 1), исследуется следующим образом: две из клемм замыкаются между собой, и измеряется сопротивление между двумя замкнутыми клеммами и третьей (свободной). В результате измерений получились сопротивления R_a, R_b, R_c. Найти номиналы резисторов R_1, R_2, R_3, из которых состоит схема.

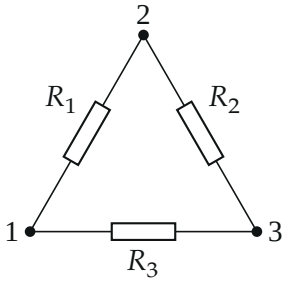
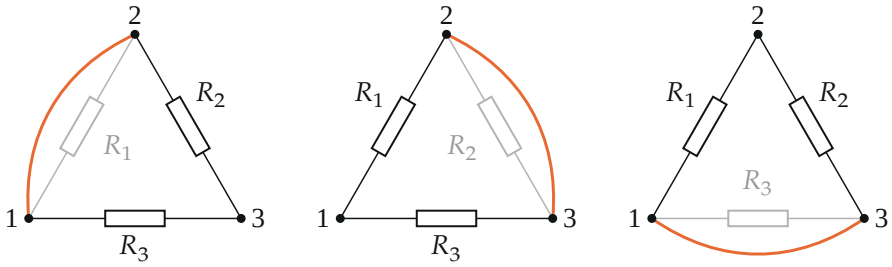


Рис. 1. Рисунок условия: резисторы R_1 (клеммы 1–2), R_2 (клеммы 2–3), R_3 (клеммы 1–3)

▲ **Решение. Что происходит.** Когда две клеммы замкнуты, резистор между ними выключается из цепи — его концы соединены проводом, тока в нём нет. Два других резистора оказываются подключёнными между замкнутым узлом и свободной клеммой, то есть соединены *параллельно*. Три измерения дают три уравнения для трёх неизвестных; удобнее решать их для *проводимостей* $1/R$: параллельное соединение складывает проводимости, и система становится линейной. Это задача на параллельное соединение резисторов; ключевая идея — замкнутая пара клемм убирает один резистор.

Обозначения. Условимся (в условии буквы a, b, c не привязаны к клеммам): R_a — сопротивление между замкнутыми клеммами 1 и 2 и свободной клеммой 3 (выпадает R_1), R_b — клеммы 2 и 3 замкнуты, свободная 1 (выпадает R_2), R_c — клеммы 1 и 3 замкнуты, свободная

2 (выпадает R_3); индекс буквы совпадает с номером выпадающего резистора — именно при такой привязке получается официальный ответ. Проводимости $G_i = 1/R_i$, $G_a = 1/R_a$ и так далее.



R_a: замкнуты 1 и 2 R_b: замкнуты 2 и 3 R_c: замкнуты 1 и 3

Рис. 2. Три измерения. Красный провод — перемычка между двумя клеммами: резистор между ними (серый) замкнут накоротко и выпадает: R_1, R_2, R_3 соответственно. Оставшиеся два резистора соединены параллельно между замкнутым узлом и свободной клеммой

1. Три измерения. При замыкании клемм 1 и 2 узел «1=2» один, свободная клемма — 3; резистор R_1 замкнут проводом, а R_2 и R_3 идут от узла к клемме 3 (рис. 3). Проводимость параллельного соединения равна сумме проводимостей:

$$G_a = G_2 + G_3.$$

Так же для остальных замыканий: при замкнутых 2 и 3 выпадает R_2, остаются R_1 и R_3 (оба между клеммой 1 и узлом «2=3»); при замкнутых 1 и 3 выпадает R_3, остаются R_1 и R_2:

$$G_b = G_1 + G_3, \qquad G_c = G_1 + G_2.$$

Закон: у параллельных ветвей напряжение одно, токи складываются, значит, складываются и проводимости.

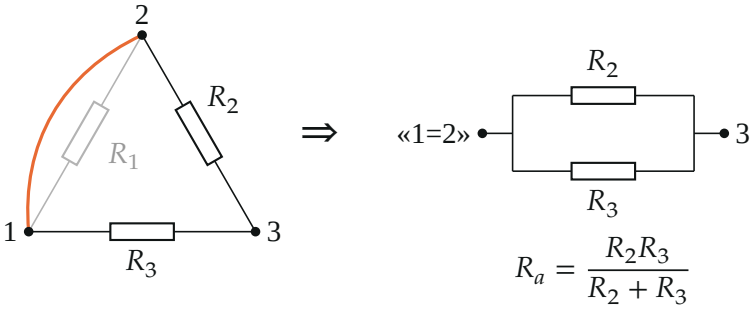


Рис. 3. Измерение R_a: резистор R_1 замкнут проводом, остаётся параллельное соединение R_2 и R_3 между узлом «1=2» и клеммой 3

2. Решаем линейную систему. Сложим первые две проводимости и вычтем третью: $G_b+G_c-G_a = (G_1+G_3)+(G_1+G_2)-(G_2+G_3) = 2G_1$. Аналогично для остальных:

$$G_1 = \frac{G_b+G_c-G_a}{2}, \quad G_2 = \frac{G_a+G_c-G_b}{2}, \quad G_3 = \frac{G_a+G_b-G_c}{2}.$$

3. Возвращаемся к сопротивлениям. $R_1 = 1/G_1$, то есть

$$R_1 = \frac{2}{1/R_b + 1/R_c - 1/R_a};$$

домножим числитель и знаменатель на $R_aR_bR_c$:

$$R_1 = \frac{2R_aR_bR_c}{R_aR_b + R_aR_c - R_bR_c},$$
$$R_2 = \frac{2R_aR_bR_c}{R_aR_b + R_bR_c - R_aR_c},$$
$$R_3 = \frac{2R_aR_bR_c}{R_aR_c + R_bR_c - R_aR_b}.$$

Обратите внимание.

- Складываются проводимости, а не сопротивления: $1/R_a = 1/R_2 + 1/R_3$, а не $R_a = R_2 + R_3$. Поэтому систему решают для $1/R$.
- Знаменатели должны быть положительными (иначе сопротивле-

ние получилось бы отрицательным): измеренные R_a, R_b, R_c обязаны удовлетворять неравенствам вида $G_b + G_c > G_a$.

Проверка. Размерность: $R_aR_bR_c/(R_aR_b)$ — Ом. Пример: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$ Ом. Тогда $R_a = \dfrac{2\cdot 3}{2+3} = 1{,}2$, $R_b = \dfrac{1\cdot 3}{1+3} = 0{,}75$, $R_c = \dfrac{1\cdot 2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$ Ом. По формуле: числитель $2\cdot 1{,}2\cdot 0{,}75\cdot \frac{2}{3} = 1{,}2$, знаменатель $R_aR_b + R_aR_c - R_bR_c = 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}5 = 1{,}2$, значит $R_1 = 1$ Ом — верно. Предельный случай $R_1 = R_2 = R_3 = R$: $R_a = R_b = R_c = R/2$, формула даёт $R_1 = 2(R/2)^3/(R^2/4) = R$. Смысл: все три измерения нужны, потому что в каждом из них один из резисторов просто выпадает.

Ответ.

$$R_1 = \frac{2R_aR_bR_c}{R_aR_b + R_aR_c - R_bR_c}, \quad R_2 = \frac{2R_aR_bR_c}{R_aR_b + R_bR_c - R_aR_c},$$
$$R_3 = \frac{2R_aR_bR_c}{R_aR_c + R_bR_c - R_aR_b}.$$