# Перелёт Ту-160

**Задача 5.** [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 5] Самолёт ТУ–160 в безветренную на всей Земле погоду стартовал с аэродрома в Санкт-Петербурге. В течение всего времени 27-часового полёта самолёт находился на одной и той же высоте и держал одну и ту же по величине скорость 1000 км/ч, сделав несколько дозаправок в воздухе. Сначала он 6 часов летел на юг, затем 10 часов на восток, потом 6 часов на север, и в последние 5 часов полёта его скорость была направлена на запад. Сколько ещё времени потребуется самолёту, чтобы с такой же по величине скоростью долететь до родного аэродрома по кратчайшему пути? Санкт-Петербург находится на широте 60°, а радиус Земли равен примерно 6400 км.

В условии нет рисунка; поясняющий рисунок — ниже (рис. 1).




*Рис. 1. Траектория на карте «широта — долгота» (не в масштабе): A — Санкт-Петербург, на юг, затем вдоль параллели 6,3° на восток, на север и по параллели 60° на запад. Точка E конца полёта оказалась чуть восточнее A (на 0,54° по долготе)*

▲ **Решение. Что происходит.** Самолёт летит над сферой, поэтому «на юг» и «на север» — это движение по меридиану, а «на восток» и «на запад» — по параллели (окружности постоянной широты). Меридиан — большая окружность радиуса $R$, а параллель на широте $\theta$ — окружность

меньшего радиуса $R\cos\theta$. Поэтому один и тот же путь по параллели даёт на высоких широтах больший поворот вокруг оси Земли, чем на низких. Полёт на юг и обратно на север возвращает на прежнюю широту, а вот полёты на восток и на запад проходят на *разных* широтах — из-за этого самолёт и не вернулся в точку старта. Разность долгот получится малой, и найти её надо точно.

**Обозначения.** $v = 1000$ км/ч — скорость, $R = 6400$ км — радиус Земли (высотой полёта пренебрегаем), $\varphi_0 = 60°$ — широта старта, $\theta$ — широта, на которой летели на восток, $\lambda$ — долгота (угол поворота вокруг оси Земли, отсчитываем на восток от долготы Санкт-Петербурга).

**1. Полёт на юг.** Путь по меридиану $s_1 = v \cdot 6$ ч $= 6000$ км. Дуга окружности радиуса $R$ связана с углом: $s_1 = R\psi$, откуда

$$\psi = \frac{s_1}{R} = \frac{6000}{6400} = 0{,}9375 \text{ рад} = 53{,}71°.$$

Широта уменьшилась на $\psi$: $\theta = 60° - 53{,}71° = 6{,}29°$. Это ещё северное полушарие (экватор не пересекли), $\theta > 0$.

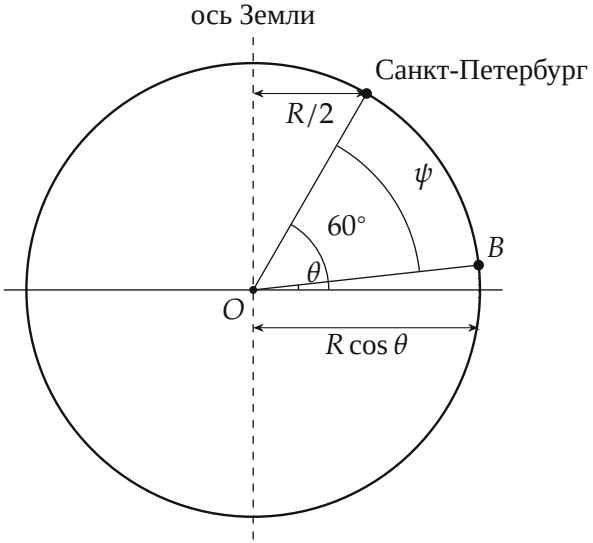



*Рис. 2. Сечение Земли плоскостью меридиана*

**2. Радиус параллели.** Параллель — окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси Земли, с центром на оси. Её радиус — горизонтальный отрезок от оси до точки на поверхности (рис. 2); он равен проекции радиуса $R$ на плоскость экватора, то есть $r(\varphi) = R\cos\varphi$. Для старта $r_0 = R\cos 60^\circ = 3200$ км, для широты $\theta$: $r = R\cos\theta = 6400 \cdot 0{,}99399 = 6361{,}5$ км.

**3. Полёт на восток по параллели $\theta$.** Путь $s_2 = v \cdot 10$ ч $= 10\,000$ км по окружности радиуса $r$ даёт поворот вокруг оси на угол (долготу)

$$\Delta\lambda_1 = \frac{s_2}{R\cos\theta} = \frac{10\,000}{6361{,}5} = 1{,}57195 \text{ рад} = 90{,}066^\circ.$$

**4. Полёт на север.** Меридиан — окружность радиуса $R$, длина дуги та же (6000 км, угол $\psi$), поэтому самолёт возвращается на широту 60° (долгота при движении по меридиану не меняется).

**5. Полёт на запад по параллели 60°.** Путь $s_4 = v \cdot 5$ ч $= 5000$ км по окружности радиуса 3200 км:

$$\Delta\lambda_2 = \frac{s_4}{R\cos 60^\circ} = \frac{5000}{3200} = 1{,}5625 \text{ рад} = 89{,}525^\circ.$$

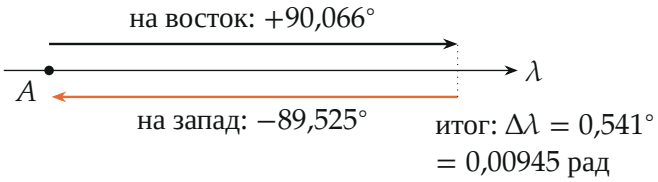



*Рис. 3. Долгота по ходу полёта: на восток почти 90°, на запад почти 90°; итог — разность двух близких чисел. Конечная точка E лежит на 0,54° восточнее A (рисунок в масштабе долготы)*

**6. Где оказался самолёт.** Он на широте 60°, на долготе

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2 = 1{,}57195 - 1{,}5625 = 0{,}00945 \text{ рад} = 0{,}54^\circ$$

к востоку от Санкт-Петербурга. Две точки $A$ и $E$ лежат на одной параллели радиуса $r_0 = 3200$ км, разность долгот мала, поэтому кратчайший

путь (по большой окружности) практически совпадает с дугой параллели и хордой:

$$l \approx r_0\,\Delta\lambda = 3200 \cdot 0{,}009449 \approx 30{,}2 \text{ км}.$$

Отличие дуги параллели от дуги большой окружности имеет порядок $(\Delta\lambda)^2 \sim 10^{-4}$ от $l$, то есть метры, на ответ не влияет.

**7. Время.**

$$t = \frac{l}{v} = \frac{30{,}2 \text{ км}}{1000 \text{ км/ч}} = 0{,}0302 \text{ ч} \approx 109 \text{ с } (108{,}8 \text{ с}).$$

Лететь надо немного на запад.

**Обратите внимание.**

- Ответ зависит от разности двух близких углов (90,07° и 89,52°), поэтому широту $\theta$ нужно держать с точностью до сотых долей градуса: сдвиг $\theta$ на 0,01° меняет ответ почти на 0,2 с: при $\theta = 6{,}29°$ выходит 109,0 с, при 6,3° — 109,4 с, без округления (6,285°) — 108,8 с. Официальный ответ 109,2 с лежит в этой вилке и отличается от точного только округлением широты; обоим соответствует «примерно 109 с».
- Возврат на широту 60° после полёта на север не зависит от долготы: все меридианы одинаковы, поэтому и на восток, и на запад летели по параллелям *разного* радиуса (6361,5 км и 3200 км), и из-за этого пути на восток и на запад не компенсируют друг друга.

**Проверка.** Размерность: $s/(R\cos\theta)$ — безразмерный угол в радианах, $l/v$ — время. Второй способ: расстояние по большой окружности по формуле $l = 2R\arcsin(\cos\varphi_0 \sin(\Delta\lambda/2))$ даёт 30,235 км — то же, что $r_0\Delta\lambda = 30{,}235$ км. Смысл: 27 часов полёта почти замкнули кольцо вокруг Земли по узкой траектории, и до дома остаётся лишь пара минут, а не часы.

**Ответ.** Ещё примерно 109 с (без промежуточных округлений 108,8 с, у организаторов 109,2 с — разница от округления широты): самолёт оказался на той же широте 60° на ≈ 30 км восточнее аэродрома.