Потоп и пирамида Хеопса

Задача 6. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 6] После завершения строительства пирамиды Хеопса все её рёбра, согласно легенде, имели одинаковую длину $A \approx 230$ м. В основании пирамиды — квадрат со стороной A. По преданиям, во время «Великого потопа» уровень воды совпал с вершиной пирамиды. С какой силой давила вода на северную боковую грань пирамиды? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Замечание: объём V пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания пирамиды.

В условии нет рисунка; поясняющий рисунок — ниже (рис. 1).

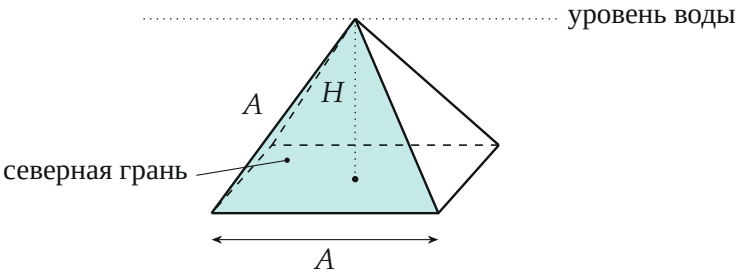


Рис. 1. Пирамида Хеопса: все рёбра длиной A, вода доходит до вершины. Закрашена северная грань (передняя); H — высота пирамиды

▲ **Решение. Что происходит.** Давление воды зависит только от глубины: $p = \rho g h$. Оно давит на каждый кусочек грани перпендикулярно грани, а полная сила — сумма сил на все кусочки. Давление растёт с глубиной линейно, поэтому суммарная сила равна давлению на «средней по площади» глубине, умноженному на площадь грани, $F = \rho g h_c S_{\text{гр}}$, где h_c — глубина центра тяжести грани. Это задача на гидростатическое давление и геометрию правильной пирамиды; второй способ — через вес воды над пирамидой.

Обозначения. $S_{\text{гр}}$ — площадь боковой грани, H — высота пирамиды, θ — угол боковой грани с горизонтом, h_c — глубина центра тяжести грани, F — искомая сила давления на северную грань.

1. Геометрия. Все рёбра равны A, поэтому каждая боковая грань — равносторонний треугольник со стороной A:

$$S_{\text{гр}} = \frac{\sqrt{3}}{4}A^2.$$

Вершина лежит над центром квадрата, а расстояние от центра до вершины основания — половина диагонали, $A/\sqrt{2}$. Рассматриваем прямоугольный треугольник: ребро (гипотенуза) A, катеты — высота H и полудиагональ $A/\sqrt{2}$:

$$H = \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} \approx 162{,}6 \text{ м}.$$

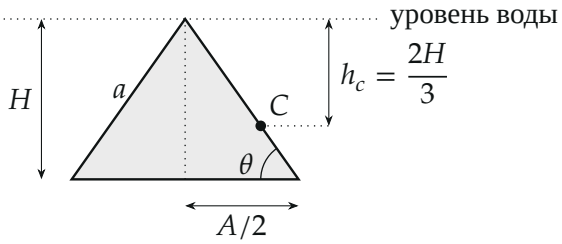


Рис. 2. Сечение пирамиды вертикальной плоскостью через вершину и середины северного и южного рёбер основания. Апофема $a = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ (высота боковой грани) лежит в этой плоскости; C — центр тяжести северной грани на расстоянии $2a/3$ от вершины, на глубине $h_c = 2H/3$

Угол грани с горизонтом найдём из сечения (рис. 2): апофема грани (высота равностороннего треугольника) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}A$, её горизонтальная проекция — половина стороны основания $A/2$, поэтому

$$\cos\theta = \frac{A/2}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2. Глубина центра тяжести грани. Вода доходит до вершины, значит, вершина грани на глубине 0, а нижнее ребро на глубине H. Тонкая

горизонтальная полоска грани на глубине h имеет ширину Ah/H (подобные треугольники), то есть нижние полоски шире верхних, и вклад в силу у них больше. Поэтому «средняя по площади» глубина h_c больше $H/2$ (рис. 3): выше середины высоты лежит лишь $1/4$ площади (подобный треугольник с коэффициентом $1/2$ имеет площадь $1/4$). Центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан, на $2/3$ его высоты от вершины, и глубина центра грани

$$h_c = \frac{2}{3}H = \frac{2}{3}\cdot\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}A \approx 108{,}4 \text{ м}.$$

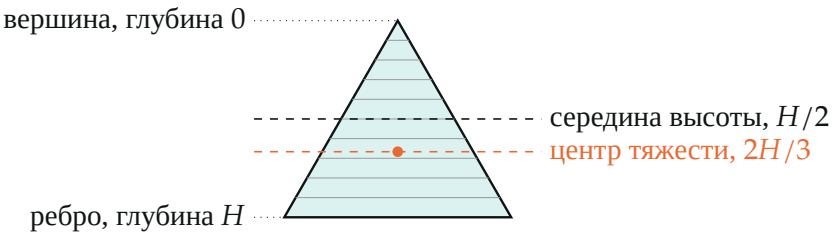


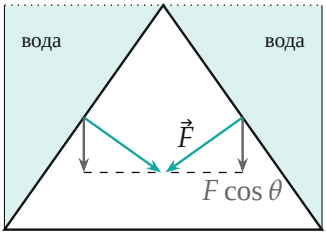
Рис. 3. Северная грань в натуральном виде (равносторонний треугольник). Выше середины высоты лежит только $1/4$ площади, ниже — $3/4$, поэтому центр тяжести глубже середины: на $2/3$ высоты от вершины

3. Сила давления. Давление на глубине h равно $\rho g h$ и нарастает линейно, а центр площади лежит на глубине h_c, поэтому суммарная сила, перпендикулярная грани, равна

$$F = \rho g h_c S_{\text{гр}} = \rho g \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}A \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}A^2 = \frac{\sqrt{6}}{12}\rho g A^3 = \frac{\rho g A^3}{2\sqrt{6}}.$$

Подставим: $A^3 = 230^3 = 1{,}2167 \cdot 10^7$ м^3, $2\sqrt{6} = 4{,}899$:

$$F = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 1{,}2167 \cdot 10^7}{4{,}899} \approx 2{,}48 \cdot 10^{10} \text{ Н}.$$



вес воды
над пирамидой
$\rho g(SH - V)$

Рис. 4. Второй способ. Силы давления на северную и южную грани направлены внутрь пирамиды; горизонтальные составляющие взаимно уравновешены, вертикальные направлены вниз и равны $F\cos\theta$. Вес воды над четырьмя гранями вместе — вода в призме над основанием, кроме самой пирамиды

4. Второй способ (проверка). Четыре боковые грани одинаковы и лежат симметрично. Горизонтальные составляющие сил на противоположные грани (северную и южную, восточную и западную) равны и противоположны, а вертикальные составляющие каждой равны $F\cos\theta$ и направлены вниз (рис. 4). Суммарная вертикальная сила $4F\cos\theta$ равна весу воды над пирамидой — воды в вертикальной призме над основанием (площадь $S = A^2$, высота H) за вычетом объёма самой пирамиды $V = SH/3$:

$$4F\cos\theta = \rho g\left(SH - \frac{SH}{3}\right) = \frac{2}{3}\rho gSH = \frac{2}{3}\rho gA^2\cdot\frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда, с $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$:

$$F = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\rho gA^3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\rho gA^3 = \frac{\rho gA^3}{2\sqrt{6}},$$

тот же ответ.

Обратите внимание.

- Средняя глубина грани — $2H/3$, а не $H/2$: нижние полоски грани шире верхних, и их глубина учитывается с большим весом.
- Сила давления на грань направлена перпендикулярно грани, а не вертикально; вертикальна лишь её составляющая $F\cos\theta$ (она и нужна во втором способе).

Проверка. Размерность: $\rho g A^3$ — (кг/м^3)(м/с^2)м^3 = Н. Два способа дали одно и то же. Численная проверка: $h_c = 108{,}4$ м, $S_{\text{гр}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 230^2 = 22\,904$ м^2, $\rho g h_c = 1{,}084 \cdot 10^6$ Па, $F = 1{,}084 \cdot 10^6 \cdot 22\,904 = 2{,}48 \cdot 10^{10}$ Н; $4F \cos\theta = 5{,}74 \cdot 10^{10}$ Н, а $\frac{2}{3}\rho g S H = \frac{2}{3} \cdot 10^4 \cdot 52\,900 \cdot 162{,}6 = 5{,}74 \cdot 10^{10}$ Н. Смысл: сила $2{,}5 \cdot 10^{10}$ Н — вес около 2,5 млн тонн: с такой силой вода давит на одну грань.

Ответ. $F = \dfrac{\rho g A^3}{2\sqrt{6}} \approx 2{,}48 \cdot 10^{10}$ Н.