Лёд в калориметре

Задача 7. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 7] Цилиндрический калориметр радиусом $R = 10$ см и высотой $h = 30$ см заполнен льдом при температуре $t_0 = -10$ °C на одну треть своего объёма (см. рис. 1). В калориметр через отверстие сверху медленно наливают воду, имеющую температуру $t = 30$ °C. Какой максимальный объём воды можно налить в калориметр? Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_л = 2100$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3. Теплоёмкостью калориметра и потерями теплоты пренебречь.

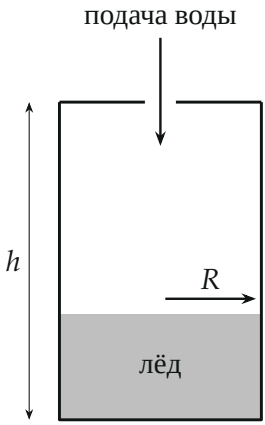


Рис. 1. Рисунок условия: калориметр, лёд занимает нижнюю треть объёма, вода подаётся сверху

▲ **Решение. Что происходит.** Тёплая вода отдаёт теплоту холодному льду: сначала лёд нагревается от -10 до 0 °C, потом, пока вода ещё горячая, часть льда тает. Воду наливают, пока в сосуде остаётся место; больше всего воды войдёт тогда, когда сосуд окажется *целиком* заполнен смесью воды и льда при 0 °C. Для этого нужны два уравнения на два неизвестных — массу налитой воды m и массу растаявшего льда Δm: уравнение теплового баланса и уравнение объёма. Это задача на теплообмен с фазовым переходом. Важный факт: лёд *легче* воды (900

против 1000), поэтому при таянии объём вещества уменьшается — и места для воды становится больше.

Обозначения. $V = \pi R^2 h$ — объём калориметра, $M = \rho_л V/3$ — начальная масса льда, m — масса налитой воды, Δm — масса растаявшего льда. Температура в конце 0 °C (покажем в п. 4, что часть льда осталась).

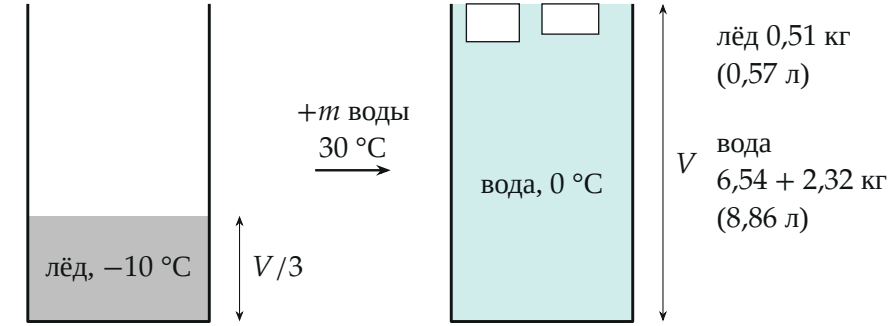


Рис. 2. Начало и конец процесса. Объёмы: $V = 9{,}42$ л; в конце вода (налитая плюс растаявшая) и оставшийся лёд вместе занимают весь сосуд. Рисунок не в масштабе по высоте льда

1. Исходные величины.

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}3 = 9{,}42 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3,$$

$$M = \frac{\rho_л V}{3} = \frac{900 \cdot 9{,}42 \cdot 10^{-3}}{3} = 2{,}83\ \text{кг}.$$

2. Тепловой баланс. Система «вода + лёд» теплоизолирована, значит, сколько теплоты отдаст остывающая вода, столько получит лёд (на нагрев и на плавление). Вода остывает от $t = 30$ °C до 0 °C и отдаёт $c_в t m$. Лёд нагревается от $t_0 = -10$ °C до 0 °C, на это нужно $c_л |t_0| M$, и ещё $\lambda \Delta m$ идёт на плавление части льда:

$$c_в t m = c_л |t_0| M + \lambda \Delta m.$$

Подставим числа: $126\,000\, m = 59\,400 + 330\,000\, \Delta m$, откуда $\Delta m = 0{,}3818\, m - 0{,}180$ (в кг).

3. Уравнение объёма. В конце вода (налитая m и растаявшая Δm, плотность $\rho_в$) и оставшийся лёд (масса $M - \Delta m$, плотность $\rho_л$) вместе занимают весь сосуд:

$$\frac{m + \Delta m}{\rho_в} + \frac{M - \Delta m}{\rho_л} = V.$$

Так как $M/\rho_л = V/3$, получаем $\dfrac{m}{\rho_в} + \Delta m \left(\dfrac{1}{\rho_в} - \dfrac{1}{\rho_л}\right) = \dfrac{2}{3}V$. Подставим Δm из п. 2 (числа в системе СИ):

$$\begin{aligned} 10^{-3}m - 1{,}111 \cdot 10^{-4}\,(0{,}3818\,m - 0{,}180) &= 6{,}283 \cdot 10^{-3}, \\ 9{,}576 \cdot 10^{-4}\,m &= 6{,}263 \cdot 10^{-3}, \\ m &= 6{,}54 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Объём налитой воды $V_в = m/\rho_в = 6{,}54$ л.

4. Общая формула и проверка предположения. Решая в общем виде (исключая Δm):

$$V_в = \frac{\pi R^2 h\,\rho_л\,(2\lambda\rho_в - c_л|t_0|(\rho_в - \rho_л))}{3\rho_в\,(\lambda\rho_л - c_в t(\rho_в - \rho_л))} \approx 6{,}54 \text{ л}.$$

Растаяло $\Delta m = 0{,}3818 \cdot 6{,}54 - 0{,}180 = 2{,}32$ кг $< M = 2{,}83$ кг — значит, лёд остался (0,51 кг), температура смеси 0 °C, и предположение верно.

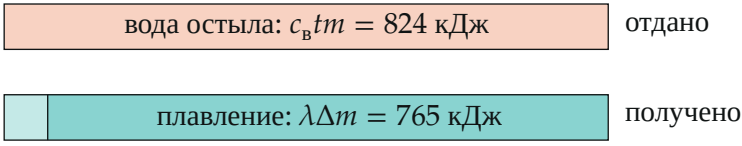


Рис. 3. Энергетический баланс. Вода, остыв до 0 °C, отдаёт 824 кДж; из них 59 кДж уходит на нагрев льда до 0 °C и 765 кДж — на плавление 2,32 кг льда. Длины прямоугольников — в масштабе

Обратите внимание.

- Объём калориметра заполнен смесью *воды и льда*, а не одной водой: уравнение объёма учитывает оставшийся лёд ($M-\Delta m$ с плотностью $\rho_л$), а не только воду.
- Температура льда $t_0 = -10$ °C отрицательна, нагрев льда до нуля требует $c_л|t_0|M > 0$. Если формулу записать через t_0 со знаком, в числителе стоит $2\lambda\rho_в + c_л t_0(\rho_в - \rho_л)$ и подставлять надо $t_0 = -10$ °C. Подстановка $t_0 = +10$ даёт 6,58 л — так в официальном ответе; верно 6,54 л.

Проверка. Размерность: $c_в t\, m$ и $\lambda\Delta m$ — джоули; m/ρ — кубические метры. Подстановка в оба уравнения: $c_в t m = 126\,000 \cdot 6{,}541 = 824{,}1$ кДж, $c_л|t_0|M + \lambda\Delta m = 59{,}4 + 330 \cdot 2{,}317 = 824{,}1$ кДж; объём: $(6{,}541 + 2{,}317)/1000 + (2{,}827 - 2{,}317)/900 = 0{,}008858 + 0{,}000567 = 0{,}009425$ м$^3 = V$. Предел: если бы лёд не таял ($\lambda \to \infty$), формула дала бы $V_в = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ — вода заняла бы ровно свободные две трети сосуда; таяние добавляет места, и ответ больше: $6{,}54 > 6{,}28$ л. Монотонность: с ростом m занятый объём растёт ($1/\rho_в - (c_в t/\lambda)(1/\rho_л - 1/\rho_в) = 10^{-3} - 0{,}42\cdot 10^{-4} > 0$ на каждый килограмм воды), поэтому максимум достигается при полном заполнении. Смысл: воды вошло почти 70 % объёма калориметра, потому что она растопила 82 % льда, а вода из растаявшего льда занимает меньше места.

Ответ.

$$V_в = \frac{\pi R^2 h\,\rho_л\,(2\lambda\rho_в - c_л|t_0|(\rho_в - \rho_л))}{3\rho_в\,(\lambda\rho_л - c_в t(\rho_в - \rho_л))} \approx 6{,}54 \text{ л}.$$