Четыре резистора со звезды

Задача 8. [МОШ 2010/11, 9 класс, задача 8] Схема состоит из 4-х клемм и 4-х различных резисторов, которые имеют один общий вывод, а другим выводом соединены с соответствующей клеммой (см. рис. 1). Известны сопротивления между клеммами 1–2, 2–3 и 3–4: они равны R_{12}, R_{23} и R_{34}. Сопротивление между какими клеммами ещё необходимо измерить, чтобы найти номиналы всех резисторов R_1, R_2, R_3 и R_4? Чему они будут равны?

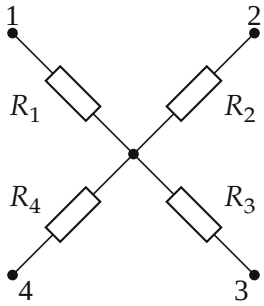


Рис. 1. Рисунок условия: четыре резистора соединены «звездой» — общий вывод в центре, свободные выводы идут к клеммам 1–4

▲ **Решение. Что происходит.** У клеммы ничего, кроме своего резистора, не подключено. Если измерять сопротивление между клеммами i и j, ток входит в клемму i, проходит резистор R_i, центральный узел и резистор R_j и выходит из клеммы j. Остальные два резистора лежат на «висящих» ветках, тока в них нет, поэтому *последовательное* соединение даёт

$$R_{ij} = R_i + R_j.$$

Так что каждое измерение — одно линейное уравнение для четырёх неизвестных. Известны три суммы, а неизвестных четыре — не хватает одного уравнения. Но не каждая четвёртая сумма годится: нужна *независимая* от трёх данных. Это задача на последовательное соединение и на решение системы линейных уравнений.

Обозначения. R_i — номиналы резисторов, R_{ij} — измеренное сопротивление между клеммами i и j.

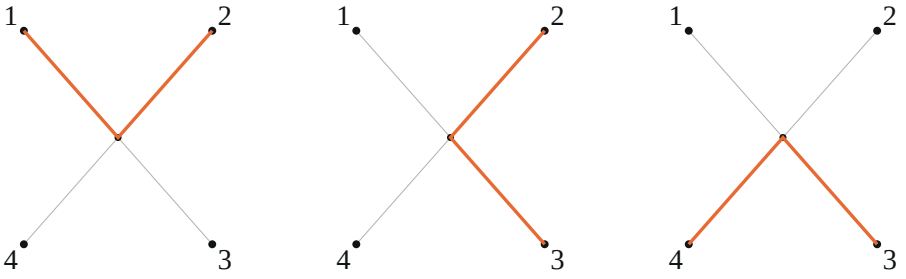


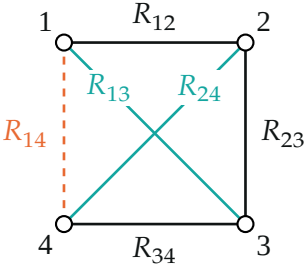
Рис. 2. Путь тока между двумя клеммами (красный) идёт через два резистора последовательно; остальные ветки (серые) тока не несут. Три данных измерения

1. Три данных уравнения.

$$R_1 + R_2 = R_{12}, \qquad R_2 + R_3 = R_{23}, \qquad R_3 + R_4 = R_{34}.$$

Через один неизвестный, например R_1, выражаются остальные цепочкой: $R_2 = R_{12} - R_1$, $R_3 = R_{23} - R_2 = R_{23} - R_{12} + R_1$, $R_4 = R_{34} - R_3 = R_{34} - R_{23} + R_{12} - R_1$. Значит, одного числа не хватает.

2. Какое измерение не поможет: R_{14}**.** Сложим три данных с чередованием знаков: $R_{12} - R_{23} + R_{34} = (R_1 + R_2) - (R_2 + R_3) + (R_3 + R_4) = R_1 + R_4$. Так что $R_{14} = R_{12} - R_{23} + R_{34}$ — уже известно, и сумма $R_1 + R_4$ ничего нового не даёт: система остаётся с одной свободной переменной (рис. 3: четыре клеммы, замкнутые в чётное кольцо 1–2–3–4–1).



чёрные — известные;
бирюзовые — подходят;
красная — лишняя

Рис. 3. Клеммы — вершины, измеренные сопротивления — рёбра. Чёрная цепочка 1–2–3–4 задана. Диагональ R_{13} или R_{24} замыкает треугольник (три неравные суммы определяют три резистора), а ребро R_{14} замыкает четырёхугольник и ничего не добавляет

3. Что нужно измерить. Подходят R_{13} или R_{24} (любое из двух). Тогда три клеммы образуют «треугольник» из трёх попарных сумм, и по ним находятся все три резистора.

Случай A: измерено $R_{13} = R_1 + R_3$. Три попарные суммы для клемм 1, 2, 3: R_{12}, R_{23}, R_{13}. Складываем две и вычитаем третью, например $R_{12} + R_{13} - R_{23} = (R_1 + R_2) + (R_1 + R_3) - (R_2 + R_3) = 2R_1$:

$$R_1 = \frac{R_{12} + R_{13} - R_{23}}{2}, \quad R_2 = \frac{R_{12} + R_{23} - R_{13}}{2},$$
$$R_3 = \frac{R_{13} + R_{23} - R_{12}}{2}.$$

Четвёртый — из R_{34}:

$$R_4 = R_{34} - R_3 = \frac{2R_{34} + R_{12} - R_{13} - R_{23}}{2}.$$

Случай B: измерено $R_{24} = R_2 + R_4$. Теперь треугольник из клемм 2, 3, 4 (суммы R_{23}, R_{34}, R_{24}):

$$R_2 = \frac{R_{24} + R_{23} - R_{34}}{2}, \quad R_3 = \frac{R_{23} + R_{34} - R_{24}}{2},$$
$$R_4 = \frac{R_{24} + R_{34} - R_{23}}{2},$$

а первый — из R_{12}:

$$R_1 = R_{12} - R_2 = \frac{2R_{12} + R_{34} - R_{24} - R_{23}}{2}.$$

Обратите внимание.

- Измерять R_{14} бесполезно: эта сумма выражается через три данных ($R_{14} = R_{12} - R_{23} + R_{34}$). Нужна клемма, замыкающая цепочку

на нечётный цикл — треугольник.

- В случае А формулы для R_2 и R_3 легко перепутать: R_2 получается из $R_{12}+R_{23}-R_{13}$ (в него входят суммы, содержащие R_2), а R_3 — из $R_{13}+R_{23}-R_{12}$. В официальном ответе эти две формулы переставлены (проверка на числах ниже это показывает).

Проверка. Размерность — Ом во всех формулах. Числа: $R_1=1, R_2=2, R_3=3, R_4=4$ Ом: $R_{12}=3$, $R_{23}=5$, $R_{34}=7$ Ом. Случай А ($R_{13}=4$): $R_1=(3+4-5)/2=1$, $R_2=(3+5-4)/2=2$, $R_3=(4+5-3)/2=3$, $R_4=(14+3-4-5)/2=4$ — верно. Случай В ($R_{24}=6$): $R_2=(6+5-7)/2=2$, $R_3=(5+7-6)/2=3$, $R_4=(6+7-5)/2=4$, $R_1=(2\cdot 3+7-6-5)/2=1$ — верно. $R_{14}=3-5+7=5=1+4$ — совпадает. Смысл: уравнений должно быть столько же, сколько неизвестных, и они не должны быть следствием друг друга.

Ответ. Нужно измерить R_{13} или R_{24} (но не R_{14}).

Случай R_{13}:

$$R_1=\frac{R_{12}+R_{13}-R_{23}}{2},\quad R_2=\frac{R_{12}+R_{23}-R_{13}}{2},$$
$$R_3=\frac{R_{13}+R_{23}-R_{12}}{2},\quad R_4=\frac{2R_{34}+R_{12}-R_{13}-R_{23}}{2}.$$

Случай R_{24}:

$$R_2=\frac{R_{24}+R_{23}-R_{34}}{2},\quad R_3=\frac{R_{23}+R_{34}-R_{24}}{2},$$
$$R_4=\frac{R_{24}+R_{34}-R_{23}}{2},\quad R_1=\frac{2R_{12}+R_{34}-R_{24}-R_{23}}{2}.$$