Брусок под углом

Задача 1. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 1] На горизонтальном столе лежит деревянный брусок. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском $\mu = 0{,}1$. Если приложить к бруску силу, направленную вверх под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, то брусок будет двигаться по столу с ускорением $a = 0{,}18$ м/с^2. Под каким углом β надо приложить к бруску такую же по модулю силу, чтобы брусок двигался по столу равномерно? Ответ округлите до целых градусов. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

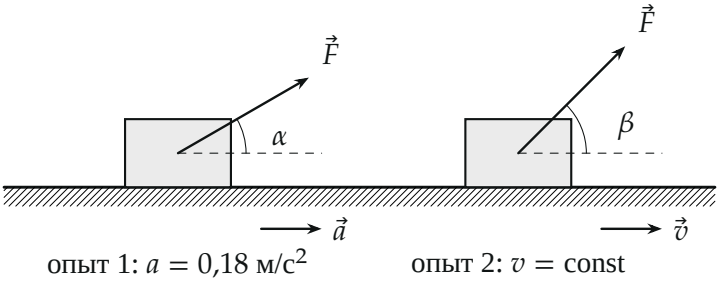


Рис. 1. Два опыта: сила F одна и та же по модулю, углы разные

▲ **Решение. Что происходит.** Сила, направленная вверх под углом к столу, делает две вещи сразу: тянет брусок вперёд (составляющая $F\cos\alpha$) и частично разгружает стол (составляющая $F\sin\alpha$ уменьшает силу реакции, а с ней и трение). Модуль F в обоих опытах один и тот же, поэтому из первого опыта находим F через m, а во втором подбираем такой угол, при котором тяга ровно равна трению. Класс задачи: динамика с трением, второй закон Ньютона в проекциях.

Обозначения. m — масса бруска, F — модуль приложенной силы, N_1, N_2 — силы реакции стола в опытах 1 и 2. Ось x — вдоль стола по направлению движения, ось y — вертикально вверх: на x лежит ускорение, на y ускорения нет.

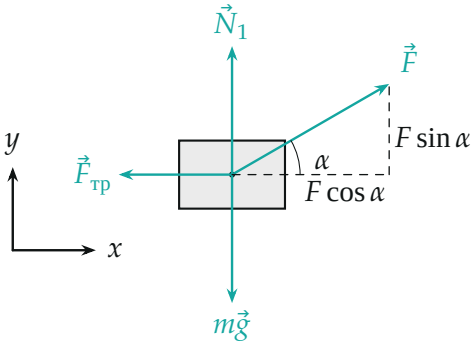


Рис. 2. Схема «брусок»: все силы опыта 1 и оси

Опыт 1 (ускоренное движение). Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси.

Вертикаль: брусок не движется по y, поэтому

$$N_1 + F\sin\alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = mg - F\sin\alpha.$$

Горизонталь: тяга $F\cos\alpha$ вперёд, трение скольжения $F_{тр} = \mu N_1$ назад,

$$F\cos\alpha - \mu N_1 = ma.$$

Подставим N_1:

$$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = m(a + \mu g). \qquad (1)$$

Опыт 2 (равномерное движение). Ускорения нет, сумма сил равна нулю. Вертикаль: $N_2 = mg - F\sin\beta$. Горизонталь: $F\cos\beta = \mu N_2$, то есть

$$F(\cos\beta + \mu\sin\beta) = \mu mg. \qquad (2)$$

Находим β. Неизвестных F и m два, а уравнений два — разделим (2) на (1): F и m сократятся,

$$\frac{\cos\beta + \mu\sin\beta}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \frac{\mu g}{a + \mu g},$$

откуда

$$\cos\beta + \mu\sin\beta = \frac{\mu g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{a + \mu g} \equiv C.$$

Левую часть свернём в один косинус: $\cos\beta + \mu\sin\beta = \sqrt{1+\mu^2}\,\cos(\beta - \varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi = \mu$ ($\varphi \approx 5{,}7^\circ$ — угол, при котором $f(\beta) = \cos\beta + \mu\sin\beta$ максимальна: вершина графика на рис. 3). Тогда

$$\cos(\beta-\varphi) = \frac{C}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\mu \pm \arccos\frac{\mu g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}\,(a+\mu g)}.$$

Числа: $\cos\alpha + \mu\sin\alpha = 0{,}866 + 0{,}05 = 0{,}916$; $C = \dfrac{1\cdot 0{,}916}{0{,}18+1} = 0{,}776$; $\sqrt{1+\mu^2} = 1{,}005$; $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}1 = 5{,}7^\circ$; $\arccos(0{,}776/1{,}005) = \arccos 0{,}772 = 39{,}4^\circ$. Получаем два корня:

$$\beta_1 = 5{,}7^\circ + 39{,}4^\circ \approx 45^\circ, \qquad \beta_2 = 5{,}7^\circ - 39{,}4^\circ \approx -34^\circ.$$

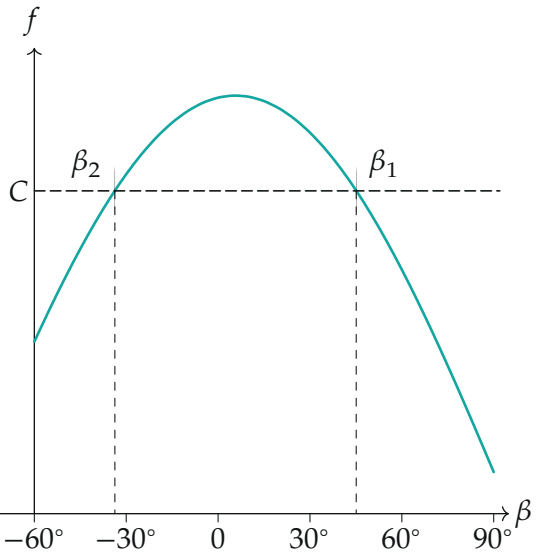


Рис. 3. График $f(\beta) = \cos\beta + \mu\sin\beta$ и уровень C: две точки пересечения — два угла

Смысл корней. Положительный угол $\beta_1 \approx 45^\circ$ — сила направлена вверх, как в опыте 1, только круче: тяга меньше, трение (за счёт разгрузки стола) меньше, и они уравновешиваются. Отрицательный угол

$\beta_2 \approx -34°$ — сила направлена вперёд и вниз, под горизонт: брусок подталкивают и слегка прижимают к столу; трение при этом растёт, но тяга $F\cos\beta_2$ как раз ему равна. В обоих случаях $F\sin\beta < mg$ (из (1): $F = mg\,\dfrac{a/g+\mu}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha} \approx 0{,}13\,mg$, поэтому $F\sin\beta_1 \approx 0{,}09\,mg$ и $F\sin\beta_2 \approx -0{,}07\,mg$): брусок от стола не отрывается, $N_2 > 0$.

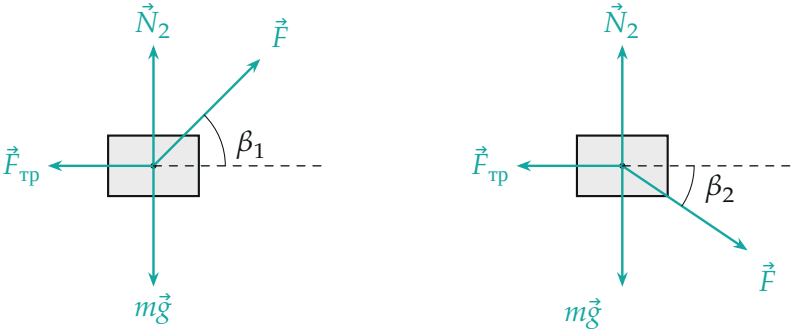


Рис. 4. Равномерное движение: сила вверх под β_1 или вниз под β_2; $F_{тр} = F\cos\beta$

Обратите внимание. Ответ на «под каким углом» имеет два значения, потому что $\cos(\beta-\varphi)$ принимает одно значение при углах по обе стороны от φ. Отрицательный корень не лишний: сила, направленная вперёд и вниз, тоже может двигать брусок равномерно.

Проверка. При $a = 0$ получаем $C = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$ и $\beta = \alpha$ (или симметричный корень): если в первом опыте и так равномерно, то второй опыт повторяет первый. При $a > 0$ правая часть уравнения становится меньше, $\cos(\beta-\varphi)$ уменьшается, и угол β_1 растёт: $45° > 30°$, как и должно быть — тягу надо ослабить. Размерность: C безразмерно (μg и $a + \mu g$ — м/с^2).

Ответ.

$$\beta = \operatorname{arctg}\mu \pm \arccos\frac{\mu g(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}\,(a+\mu g)},$$

$\beta_1 \approx 45°$ (сила вверх) или $\beta_2 \approx -34°$ (сила вниз под горизонтом).