Нелинейная пружина

Задача 2. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 2] На рисунке показан график зависимости модуля силы F растяжения пружины от её удлинения x (при больших деформациях пружина не подчиняется закону Гука). Пружину прикрепляют одним концом к потолку. К другому концу пружины, не деформируя её, аккуратно подвешивают груз массой $m = 650$ г, после чего отпускают груз без начальной скорости. Оцените, на какую максимальную длину растянется пружина. Трением и массой пружины пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

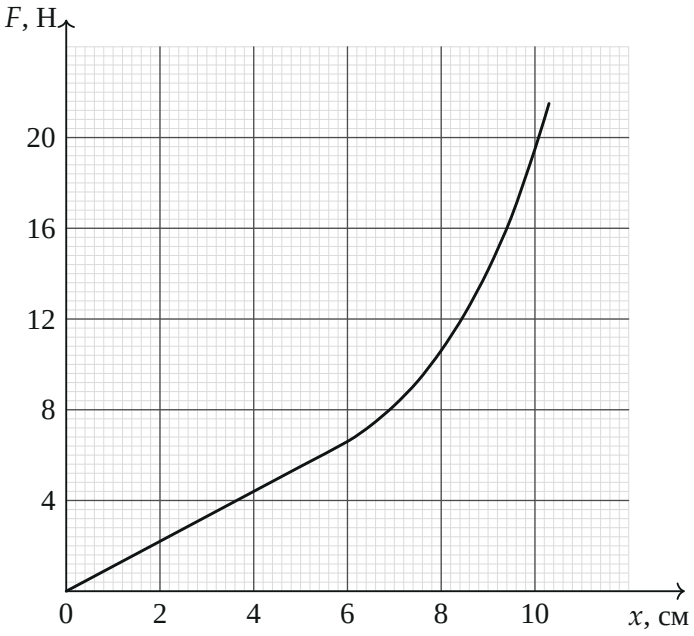


Рис. 1. График $F(x)$ для пружины (воспроизведён с рисунка условия)

▲ **Решение. Что происходит.** Груз отпускают при недеформированной пружине, и он падает. Пока удлинение мало, сила упругости меньше mg, и груз разгоняется. При $x = x_1$, где $F = mg$, скорость наибольшая; дальше сила упругости больше mg, груз тормозит и в нижней точке $x = x_0$

останавливается. Закон Гука не работает, поэтому ускорение по второму закону Ньютона на каждом шаге считать неудобно; главная идея — закон сохранения энергии, а работа силы, зависящей от x, равна площади под её графиком. Класс задачи: энергия при нелинейной силе, работа как площадь.

Обозначения. x_0 — искомое наибольшее удлинение, x_1 — удлинение в положении равновесия (рис. 2). Ось x направлена вниз, начало — конец недеформированной пружины.

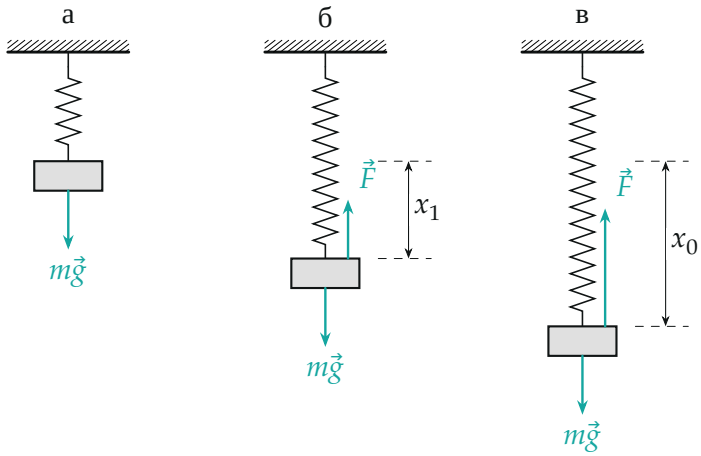


Рис. 2. Три положения груза: а — отпустили ($x = 0$, $v = 0$); б — $F = mg$, скорость наибольшая; в — нижняя точка ($v = 0$)

1. Положение равновесия. До $x \approx 6$ см график — прямая: $F = kx$ с $k = \dfrac{6{,}6\ \text{Н}}{6\ \text{см}} = 1{,}1$ Н/см (110 Н/м). Вес груза $mg = 0{,}65 \cdot 10 = 6{,}5$ Н; сила упругости равна ему при

$$x_1 = \frac{mg}{k} = \frac{6{,}5}{1{,}1} \approx 5{,}9\ \text{см}.$$

Это не нижняя точка: к моменту x_1 груз уже набрал скорость и пролетает дальше.

2. Закон сохранения энергии. Система «груз + пружина + Земля»: сил трения нет, масса пружины мала. Сравним начальное состояние

($x = 0$, $v = 0$) и нижнюю точку ($x = x_0$, $v = 0$): кинетическая энергия в обоих нуль, поэтому потеря потенциальной энергии груза в поле тяжести равна энергии, запасённой пружиной:

$$mg\,x_0 = E_{\text{упр}} = \int_0^{x_0} F\,dx.$$

Левая часть — площадь прямоугольника высотой $mg = 6{,}5$ Н и шириной x_0 (работа постоянной силы). Правая — площадь под графиком от 0 до x_0 (работа переменной силы $F(x)$ на каждом малом участке dx равна $F\,dx$, их сумма — площадь). Применимость: пружина упругая, то есть сила — однозначная функция x.

3. Равенство площадей. Обе площади содержат общую часть под прямой $F = mg$ и под графиком там, где они перекрываются; после её сокращения получаем (рис. 3 ниже)

$$S_1 = S_3,$$

где S_1 — фигура между прямой $F = mg$ и графиком при $x < x_1$ (там $mg > F$: груз разгоняется, набирая энергию S_1), S_3 — фигура между графиком и прямой при $x_1 < x < x_0$ (там $F > mg$: груз тормозит, отдавая пружине энергию S_3). Груз останавливается, когда отданная энергия сравнялась с набранной.

4. Площадь S_1. На $x < x_1$ график — прямая, фигура — прямоугольный треугольник с катетами x_1 и mg:

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\,x_1\,mg \approx \tfrac{1}{2}\cdot 5{,}9 \cdot 6{,}5 \approx 19{,}2\ \text{Н}\cdot\text{см}.$$

Заодно это кинетическая энергия груза в положении равновесия: 0,19 Дж, скорость $v_{\max} = \sqrt{2\cdot 0{,}19/0{,}65} \approx 0{,}77$ м/с.

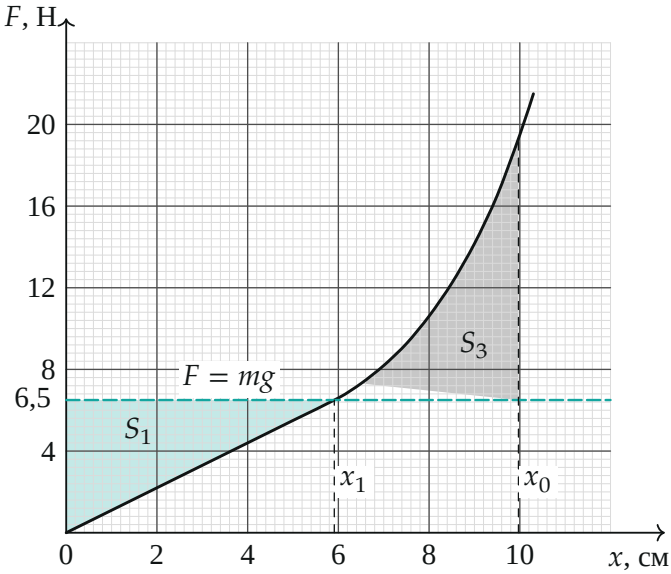


Рис. 3. Площади S_1 ($x < x_1$) и S_3 ($x_1 < x < x_0$) между графиком и прямой $F = mg$ равны

5. Площадь S_3 и x_0. Площадь $S_3(x)$ между графиком и прямой $F = mg$ с левого края x_1 до x считаем по клеткам графика (шаг 1 см по x, высота над прямой берётся по кривой):

x, см	6	7	8	9	10
F, Н	6,6	8,2	10,6	14,2	19,5
$S_3(x)$, Н · см	0	0,8	3,7	9,4	19,5

Нужно $S_3 = S_1 \approx 19{,}2$ Н·см: это достигается чуть левее 10 см (интерполяция между 9,4 и 19,5 даёт $x_0 \approx 9{,}97$ см). С учётом точности чтения графика (клетка 0,2 см, 0,4 Н)

$$x_0 \approx 10 \text{ см}.$$

Обратите внимание. Ответ не $x_1 \approx 5{,}9$ см: это положение равновесия, а не нижняя точка. Для линейной пружины жёсткостью k было бы $x_0 = 2x_1 \approx 11{,}8$ см — вдвое больше равновесного.

Проверка. Реальная пружина при $x > 6$ см становится жёстче, поэто-

му груз должен остановиться раньше, чем у линейной: $10 < 11{,}8$ — верно. Сила в нижней точке $F(x_0) \approx 19{,}5$ Н $\approx 3\,mg$ — график это значение содержит (он заканчивается на 10,3 см), так что x_0 лежит внутри данных. Второй способ: площадь под графиком до 10 см равна 65,3 Н·см, а $mg\,x_0 = 6{,}5 \cdot 10 = 65$ Н·см — расхождение 0,5%.

Ответ. $x_0 \approx 10$ см: пружина растянется на ≈ 10 см (из равенства площадей $S_1 = S_3$ на графике).