Стакан в водоёме

Задача 3. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 3] Небольшой пустой тонкостенный цилиндрический стакан объёмом V_0 переворачивают вверх дном и медленно погружают в глубокий водоём, удерживая ось стакана в вертикальном положении. Над поверхностью водоёма находится воздух (атмосферное давление p_0), температура которого равна температуре воды, а относительная влажность 100%. По какому закону будет изменяться модуль выталкивающей силы, действующей на стакан, при его погружении от поверхности воды в водоём на глубину H? Плотность воды равна ρ, ускорение свободного падения g, давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_\text{н}$.

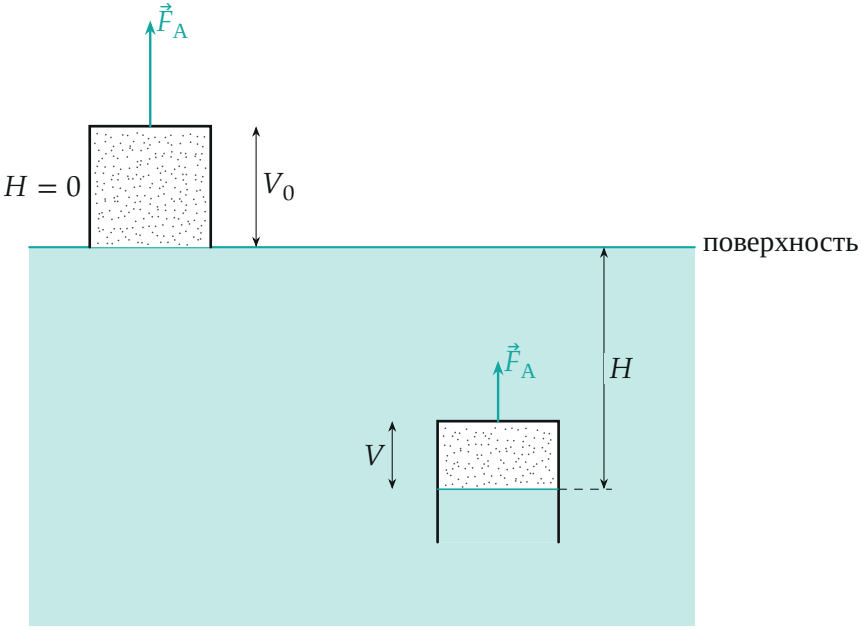


Рис. 1. Стакан у поверхности и на глубине H: объём воздуха под стаканом уменьшился с V_0 до V, глубина H отсчитывается до границы воздух—вода в стакане (стакан мал)

▲ **Решение. Что происходит.** Выталкивающая сила, действующая на тонкостенный стакан, — это вес воды в объёме газа под стаканом: $F_\text{A} =$

$\rho g V$, где V — объём газовой смеси внутри. При погружении давление растёт, газ сжимается, вода заходит в стакан, и V уменьшается. Устроено сжатие необычно: пар в стакане насыщенный (стакан стоит над водой), и при сжатии лишний пар не остаётся паром, а конденсируется — его давление всё время равно $p_{\text{н}}$. Сжимается только сухой воздух, и к нему применим закон Бойля—Мариотта. Класс задачи: смесь сухого воздуха и насыщенного пара, закон Дальтона, изотермическое сжатие.

Обозначения. V — объём газа под стаканом на глубине H; p_1 — давление сухого воздуха там; $p = p_0 + \rho g H$ — полное давление газа на глубине H. Температура одна и та же во всём (медленное погружение, вода и воздух одной температуры), поэтому сжатие изотермическое.

1. Давление внутри стакана. Газ в стакане граничит с водой, поэтому давление в нём равно давлению воды на уровне границы. На глубине H (гидростатика, давление на поверхности p_0)

$$p = p_0 + \rho g H.$$

2. Закон Дальтона. Давление смеси равно сумме парциальных давлений. Пар насыщенный (газ над водой, влажность 100% и в начале, и всё время), его давление равно $p_{\text{н}}$; значит, у сухого воздуха

$$p_1 = p - p_{\text{н}} = p_0 + \rho g H - p_{\text{н}}.$$

В начале (у поверхности) у сухого воздуха было $p_{10} = p_0 - p_{\text{н}}$ в объёме V_0.

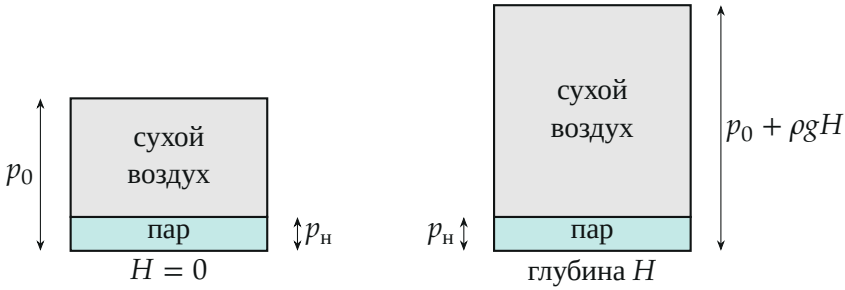


Рис. 2. Давление смеси складывается из давления пара ($p_{\text{н}}$ — не меняется) и давления сухого воздуха (растёт); высота $p_{\text{н}}$ не в масштабе

3. Закон Бойля—Мариотта для сухого воздуха. Количество сухого воздуха в стакане не меняется (он не растворяется и не выходит), температура постоянна:

$$p_{10}V_0 = p_1 V \quad \Rightarrow \quad (p_0 - p_\text{н})\, V_0 = (p_0 - p_\text{н} + \rho g H)\, V.$$

Отсюда объём, занимаемый смесью (воздух и пар занимают один и тот же объём):

$$V = V_0 \frac{p_0 - p_\text{н}}{p_0 - p_\text{н} + \rho g H}.$$

4. Выталкивающая сила. Стакан тонкостенный, поэтому вытесненная им вода — это вода в объёме V (объём стенок пренебрежимо мал):

$$F_\text{A} = \rho g V = \rho g V_0 \frac{p_0 - p_\text{н}}{p_0 - p_\text{н} + \rho g H} = \frac{\rho g V_0}{1 + \dfrac{\rho g H}{p_0 - p_\text{н}}}.$$

Введя глубину $H_* = \dfrac{p_0 - p_\text{н}}{\rho g}$, получим $F_\text{A} = \dfrac{\rho g V_0}{1 + H/H_*}$: сила убывает по гиперболе (рис. 3). На глубине H_* она вдвое меньше начальной, на $3H_*$ — вчетверо. Для воды при 20 °C ($p_\text{н} \approx 2{,}3$ кПа, $p_0 \approx 100$ кПа) $H_* \approx 9{,}8$ м.

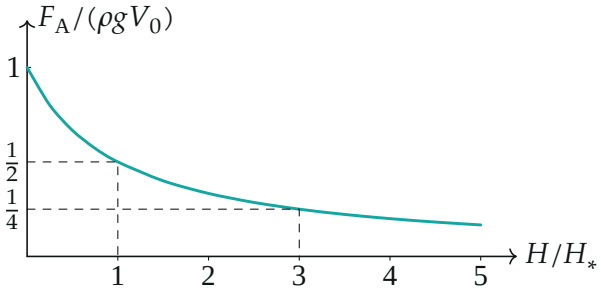


Рис. 3. Зависимость выталкивающей силы от глубины: $F_A = \rho g V_0/(1 + H/H_*)$

Обратите внимание. Нельзя применять закон Бойля—Мариотта ко всей смеси: пар при сжатии не подчиняется ему, он конденсируется, и $p_\text{н} V \neq \text{const}$. Закону подчиняется только сухой воздух.

Проверка. Размерность: $\rho g H$ и $p_0 - p_\text{н}$ — давления, отношение безразмерно, F_A в ньютонах. При $H = 0$ получаем $F_\text{A} = \rho g V_0$: на поверхности газ занимает весь стакан. При $p_\text{н} \to 0$ (сухой воздух) $F_\text{A} = \rho g V_0 p_0/(p_0 + \rho g H)$ — обычный закон Бойля—Мариотта; пар лишь слегка ускоряет убывание силы, ведь H_* меньше $p_0/(\rho g)$. При $H \to \infty$ сила стремится к нулю, как $1/H$.

Ответ. $F_\text{A} = \rho g V_0 \dfrac{p_0 - p_\text{н}}{p_0 - p_\text{н} + \rho g H} = \dfrac{\rho g V_0}{1 + \rho g H/(p_0 - p_\text{н})}$: от $\rho g V_0$ на поверхности убывает по гиперболе.