Лёд в бассейне

Задача 4. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 4] После поломки систем отопления и водоснабжения бассейна объёмом V часть воды вытекла из него, а оставшаяся часть замёрзла. В итоге в бассейне остался лёд объёмом $(10/27)V$ при температуре $0\,^\circ$C. В бассейн начинают наливать воду. Какую температуру должна иметь вода, чтобы, когда лёд растает, и бассейн будет полностью заполнен, вода в нём имела температуру $t = 20\,^\circ$C? Плотности воды и льда $\rho_в = 1000$ кг/м^3 и $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельные теплоёмкости воды и льда $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C) и $c_л = 2100$ Дж/(кг·°C) соответственно, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Потерями теплоты пренебречь.

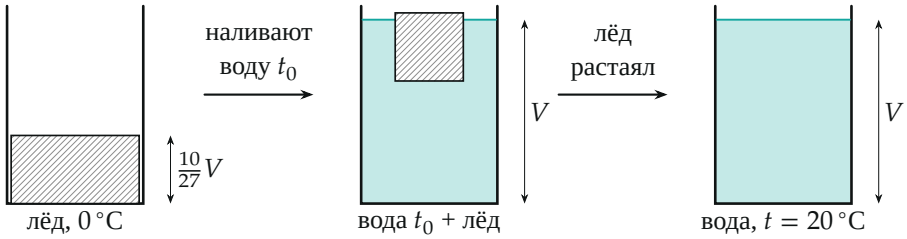


Рис. 1. Три состояния бассейна: слева — один лёд ($\frac{10}{27}V$), посередине — вода налита до края, лёд плавает, справа — лёд растаял, вода при t

▲ **Решение. Что происходит.** В бассейне лежит лёд при $0\,^\circ$C. Горячая вода, которую наливают, остывает и отдаёт теплоту; лёд сначала плавится (при $0\,^\circ$C, температура не меняется), потом получившаяся из него вода нагревается до t. Условие «лёд растаял, бассейн полон, вода при t» даёт два соотношения: объём долитой воды (по условию «полон») и тепловой баланс. Класс задачи: уравнение теплового баланса с плавлением.

Обозначения. $m_л$ — масса льда, $m_д$ — масса долитой воды, t_0 — её температура (искомая). Лёд уже при $0\,^\circ$C, поэтому его теплоёмкость $c_л$ нам не понадобится — лишнее данное.

1. Масса льда и масса долитой воды. Объём льда $\frac{10}{27}V$, поэтому

$$m_л = \rho_л \cdot \frac{10}{27}V.$$

В конце весь бассейн — вода объёмом V и массой $\rho_в V$. Эта вода — лёд плюс долитая вода (вода и лёд из бассейна не уходят, потерь нет), закон сохранения массы:

$$m_д = \rho_в V - m_л = \frac{27\rho_в - 10\rho_л}{27}\,V.$$

Числа (на 1 м^3 объёма бассейна): $m_л = 333$ кг, $m_д = 667$ кг, то есть $m_л/m_д = \dfrac{10\rho_л}{27\rho_в - 10\rho_л} = \dfrac{1}{2}$.

2. Уравнение теплового баланса. Потерь нет: теплота, отданная горячей водой, равна теплоте, полученной льдом и водой из него. Закон — сохранение энергии для системы «вода + лёд». Расписываем теплоты:

- долитая вода остывает от t_0 до t: $Q_1 = c_в\, m_д\, (t_0 - t)$ (отдаёт);
- лёд плавится при $0\,^\circ$C: $Q_2 = \lambda\, m_л$ (получает);
- вода из льда нагревается от $0\,^\circ$C до t: $Q_3 = c_в\, m_л\, t$ (получает).

Баланс $Q_1 = Q_2 + Q_3$:

$$c_в\, m_д\, (t_0 - t) = m_л\, (\lambda + c_в t).$$

Применимость: итоговая температура $t = 20\,^\circ\text{C} > 0$, значит, лёд растаял весь, и записанные три процесса — единственные.

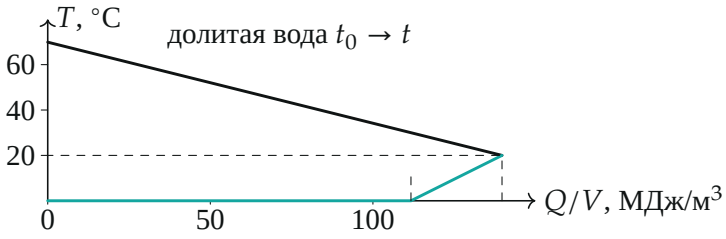


Рис. 2. Температура от переданной теплоты: вода остывает (чёрная), лёд плавится (горизонталь) и греется (бирюза)

3. Решаем. Разделим на $c_в m_д$ и подставим отношение масс:

$$t_0 = t + \frac{m_л}{m_д}\left(\frac{\lambda}{c_в} + t\right) = t + \frac{10\rho_л\,(t + \lambda/c_в)}{27\rho_в - 10\rho_л}.$$

Числа: $\lambda/c_в = 335\,000/4200 \approx 79{,}8\,^\circ\text{C}$, поэтому $t + \lambda/c_в \approx 99{,}8\,^\circ\text{C}$, $\dfrac{10\cdot 900}{27\cdot 1000 - 10\cdot 900} = \dfrac{9000}{18\,000} = \dfrac{1}{2}$:

$$t_0 = 20 + \tfrac{1}{2}\cdot 99{,}8 \approx 69{,}9\,^\circ\text{C} \approx 70\,^\circ\text{C}.$$

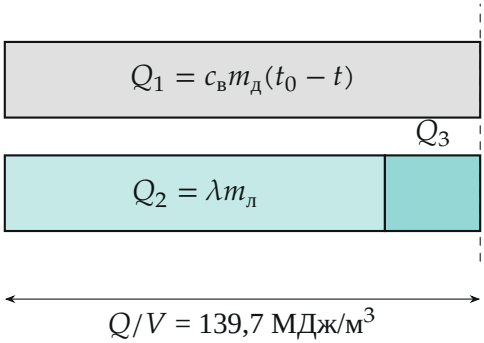


Рис. 3. Баланс теплот $Q_1 = Q_2 + Q_3$; числа — на 1 м^3 бассейна

Обратите внимание. Лёд плавает, но уровень воды при таянии не меняется: вытесненная плавающим льдом вода по объёму равна воде, которая из него получится. Поэтому «бассейн полон» в конце то же самое, что «налита вода до края» до таяния: рис. 1, посередине, лёд выступает над краем на $\frac{1}{10}$ своего объёма.

Проверка. Размерность: $\lambda/c_в$ — градусы, t_0 — градусы. Предельный случай $\lambda \to 0$ (лёд просто холодная вода): $t_0 = t(1 + m_л/m_д) = 30\,^\circ\text{C}$ — смешали 667 кг воды при 30 °C и 333 кг при 0 °C, получили 20 °C. Значит, из 70 °C: 30 °C нужны на нагрев, а ещё $\approx$ 40 °C — на плавление льда ($\frac{1}{2}\lambda/c_в \approx 40$). Числовая проверка баланса: $Q_1 = 667\cdot 4200\cdot 49{,}9 \approx 139{,}7$ МДж, $Q_2 + Q_3 = 333\cdot(335\,000 + 84\,000) \approx 139{,}7$ МДж.

Ответ. $t_0 = t + \dfrac{10\rho_л\,(t + \lambda/c_в)}{27\rho_в - 10\rho_л} \approx 70\,^\circ\text{C}$.