Клин с шайбой на нити

Задача 6. [МОШ 2011/12, 10 класс, задача 6] На гладкой горизонтальной поверхности находится клин с высотой $h = 30$ см и шириной основания $d = 40$ см. На его гладкой наклонной плоскости находится маленькая шайба, соединённая с клином при помощи невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через два блока (см. рисунок). Блоки невесомые и вращаются без трения, масса клина в $n = 8$ раз больше массы шайбы. С каким ускорением начнёт двигаться клин после отпускания? Ускорение свободного падения считайте равным $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Движение клина — поступательное.

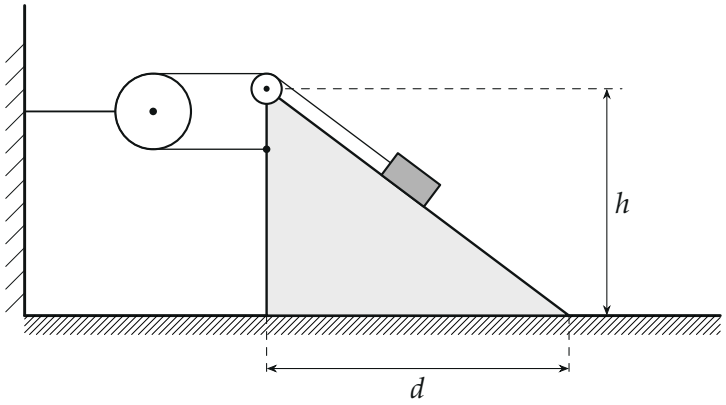


Рис. 1. Клин с шайбой, нить через два блока

▲ **Решение. Что происходит.** Шайба тянет нить вниз по склону, а нить привязана к клину и перекинута через неподвижный блок на стене: шайба и клин связаны нитью, поэтому клин не стоит на месте, а ползёт к стене, а шайба одновременно скользит вниз по склону относительно клина. Главная идея — сначала связь перемещений из нерастяжимости нити (клин сдвинулся на X — шайба по склону на $2X$), затем закон сохранения энергии. Класс задачи: движение связанных нитью тел, где ускорение проще найти из энергии системы, а законы Ньютона оставить для проверки.

Обозначения. m — масса шайбы, $M = nm$ — масса клина, α — угол при основании клина, A — ускорение клина, V — его скорость в произвольный момент. Из размеров клина: гипотенуза $\sqrt{h^2 + d^2} = 50$ см, поэтому

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}} = 0{,}6, \qquad \cos\alpha = \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}} = 0{,}8.$$

Ось x направим вправо, ось y — вверх (рис. 3): шайба и клин движутся в вертикальной плоскости.

1. Связь перемещений. Длина нити неизменна. Нить состоит из трёх частей (рис. 2): отрезок s от шайбы до блока на вершине клина, горизонтальный отрезок ℓ от этого блока до неподвижного блока и ещё один такой же, ℓ, от неподвижного блока до точки крепления на клине, плюс постоянные дуги на блоках:

$$s + \ell + \ell = \text{const}.$$

Если клин сместился влево на X (к стене), оба горизонтальных отрезка укоротились на X, значит s выросло на $2X$: шайба сместилась по склону вниз относительно клина на $2X$. Тот же вывод для скоростей и ускорений: если клин движется влево со скоростью V (ускорением A), то относительно клина шайба идёт вниз по склону со скоростью $w = 2V$ (ускорением $2A$).

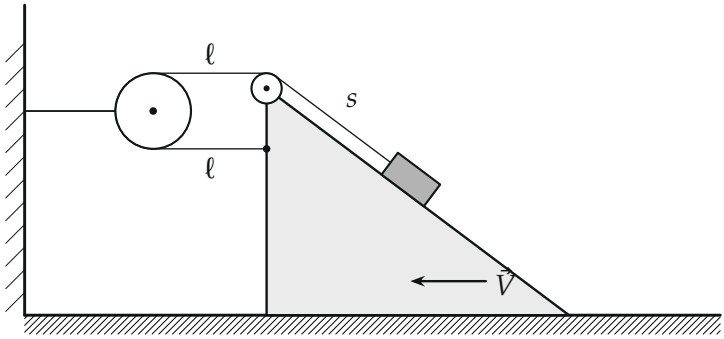


Рис. 2. Нить: отрезок s и два отрезка ℓ, $s + 2\ell = const$

2. Скорость шайбы в системе стола. Скорость шайбы в системе отсчёта стола — сумма скорости клина и скорости относительно клина (рис. 3): $\vec{v} = \vec{V} + \vec{w}$. Клин движется влево (против оси x), шайба относительно клина — вниз вдоль склона, то есть вправо-вниз:

$$v_x = -V + w\cos\alpha = (2\cos\alpha - 1)V, \qquad v_y = -w\sin\alpha = -2V\sin\alpha.$$

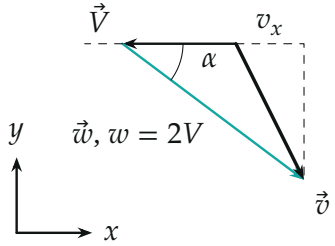


Рис. 3. Скорость шайбы в системе стола: $\vec{v} = \vec{V} + \vec{w}$, $w = 2V$

3. Закон сохранения энергии. Система «клин + шайба»: пол гладкий, склон гладкий, нить и блоки идеальные — механическая энергия сохраняется (неподвижный блок никакой работы не совершает, натяжение нити работы не даёт: силы натяжения на концах нити и сила на блоке в сумме работы не совершают). Энергию считаем с момента, когда всё было неподвижно. Кинетическая энергия клина $\frac{1}{2}MV^2$, шайбы

$$\tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \tfrac{1}{2}mV^2[(2\cos\alpha - 1)^2 + 4\sin^2\alpha] = \tfrac{1}{2}mV^2(5 - 4\cos\alpha).$$

Потеря потенциальной энергии шайбы: когда клин сместился на X, шайба прошла по склону $2X$ вниз, то есть опустилась на $2X\sin\alpha$:

$$\tfrac{1}{2}[M + m(5 - 4\cos\alpha)]V^2 = mg\cdot 2X\sin\alpha.$$

Силы в системе во время движения постоянны, поэтому движение клина равноускоренное: $V^2 = 2AX$. Подставляем и сокращаем X:

$$[M + m(5 - 4\cos\alpha)]A = 2mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2g\sin\alpha}{n + 5 - 4\cos\alpha}.$$

4. Числа. $n + 5 - 4\cos\alpha = 8 + 5 - 3{,}2 = 9{,}8$, $2\sin\alpha = 1{,}2$:

$$A = \frac{1{,}2g}{9{,}8} = \frac{6}{49}g \approx 1{,}2\ \text{м/с}^2 \qquad (g = 9{,}8\ \text{м/с}^2).$$

Клин ускоряется к стене.

Обратите внимание. Ускорение шайбы относительно клина — $2A$, а не A: нить проходит через два горизонтальных отрезка, и каждый укорачивается на сдвиг клина. Если взять $a_{\text{отн}} = A$, получится знаменатель $n + 2 - 2\cos\alpha$ и неверный ответ.

Проверка вторым способом (законы Ньютона). Силы показаны на рис. 4.

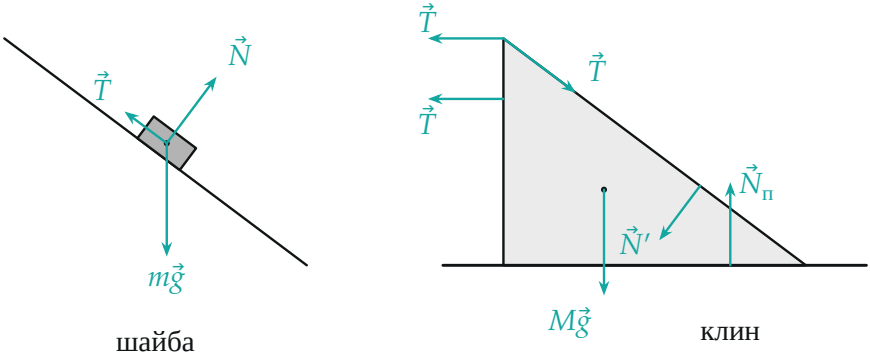


Рис. 4. Силы на шайбу и на клин ($N' = N$)

Ускорение шайбы в системе стола: $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}_{\text{отн}}$, $a_x = (2\cos\alpha - 1)A$, $a_y = -2A\sin\alpha$ (A — модуль ускорения клина влево). Для шайбы проекции на склон (вверх вдоль склона) и на нормаль $\vec{n}$:

$$T - mg\sin\alpha = ma_{\parallel} = -(2 - \cos\alpha)\,mA, \qquad N - mg\cos\alpha = -mA\sin\alpha.$$

Для клина — проекция на ось x (влево от шайбы тянут нить дважды, нить по склону тянет вправо, шайба давит влево): $MA = (2 - \cos\alpha)T + N\sin\alpha$. Подставим T и N:

$$MA = 2mg\sin\alpha - mA(5 - 4\cos\alpha) \;\Rightarrow\; A = \frac{2g\sin\alpha}{n + 5 - 4\cos\alpha},$$

тот же результат. Заодно $T \approx 0{,}45\,mg > 0$ (нить натянута) и $N \approx 0{,}73\,mg > 0$ (шайба прижата): допущения верны.

Проверка предела. Если клин очень тяжёлый ($n \to \infty$), $A \to 0$ и шайба скользит по неподвижному склону; если n мал, ускорение больше. Размерность A — как у g.

Ответ. $A = \dfrac{2g\sin\alpha}{n + 5 - 4\cos\alpha} = \dfrac{6}{49}\,g \approx 1{,}2$ м/с^2 (клин движется к стене).